

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky  
Obor: Matematická fyzika



**Geometrická algebra v  
diferenciální geometrii a ve fyzice**  
**Geometric Algebra in Differential  
Geometry and Physics**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Šimon Vedl  
Vedoucí práce: Ing. Václav Zatloukal, Ph.D.  
Rok: 2020



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorských a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne .....

.....  
podpis



## Poděkování

Chtěl bych poděkovat Ing. Václavu Zatloukalovi, Ph.D za vedení moji bakalářské práce a za jeho trpělivost, množství času, které věnoval mému zasvěcení do problematiky geometrické algebry a jejích aplikací, a za to, že mi pomohl rozšířit moje obzory jak v oblastech matematiky, tak fyziky. Dále bych chtěl poděkovat Davidu Kramárovi za plodné diskuze o geometrii a matematice. Chtěl bych poděkovat Adéle Kubincové za její věcné poznámky a korekci nedostatků v této práci. Nakonec bych chtěl poděkovat svojí rodině za jejich neutuchající podporu

Šimon Vedl



*Název práce:*

## **Geometrická algebra v diferenciální geometrii a ve fyzice**

*Autor:* Šimon Vedl

*Obor:* Matematická fyzika

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Ing. Václav Zatloukal, Ph.D.

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

*Konzultant:* –

*Abstrakt:* Geometrickou algebru představil W. K. Clifford již v 19. století. Náznaky jejího využití se objevují při formulaci kvantové teorie ve 20. letech 20. století, konkrétně ve formě Pauliho matic a Diracových  $\gamma$  matic. Těmto pojmům dal v druhé polovině 20. století názorný geometrický význam D. Hestenes a rozhodl se vytvořit z geometrické algebry univerzální nástroj pro teoretickou fyziku. V této práci se snažíme intuitivně představit pojem multivektoru a Cliffordova geometrického součinu a interpretovat jejich geometrický význam. Dále se zabýváme geometrickou analýzou, tedy diferenciálním a integrálním počtem multivektorových funkcí. V posledních dvou kapitolách demonstrujeme sílu geometrického součinu při popisu pohybu tuhého tělesa a geometrie variet vnořených do eukleidovského prostoru. Pro popis vnořených variet zavedeme shape operátor, který je výhodný pro uchopení pojmů paralelního přenosu a křivosti.

*Klíčová slova:* geometrická algebra, Cliffordova algebra, multivektory, vnořené variety, shape operátor

*Title:*

## **Geometric Algebra in Differential Geometry and Physics**

*Author:* Šimon Vedl

*Abstract:* The geometric algebra was introduced by W. K. Clifford in the nineteenth century. Whiff of its use can be seen in the quantum theory of 1920s, namely in the form of Pauli matrices and Dirac  $\gamma$  matrices. In the second half of the twentieth century D. Hestenes gave these algebraic objects concrete geometric meaning. In this thesis we aim to intuitively present multivectors and Clifford's geometric product and interpret their geometric significance. Furthermore, we introduce geometric calculus of multivector-valued functions. In the last two chapters we focus on applications of geometric product to the rigid body problem and the description of geometry of manifolds embedded in Euclidean spaces. In the process we introduce the shape operator, which is very well suited for the description of parallel transport and curvature.

*Keywords:* geometric algebra, Clifford algebra, multivectors, embedded manifolds, shape operator





# Obsah

Úvod	3
<b>1 Konstrukce a základní vlastnosti geometrické algebry</b>	<b>5</b>
1.1 Komplexní čísla a $\mathcal{G}_2$	5
1.2 Geometrická algebra nad $\mathbb{R}^3$	7
1.2.1 Rotace v $\mathbb{R}^3$	9
1.2.2 Reprezentace $\mathcal{G}_3$ pomocí matic	9
1.3 Geometrická algebra v obecné dimenzi	10
1.3.1 Pseudoskalár a projekce	17
1.3.2 Zrcadlení a rotace v $\mathbb{R}^N$	21
1.3.3 Reciproká báze	23
1.3.4 Lineární operátory a multivektory	24
<b>2 Základní pojmy geometrické analýzy</b>	<b>27</b>
2.1 Operátor vektorové derivace	27
2.1.1 Gradient, divergence a rotace	29
2.2 Orientovaný integrál	30
2.2.1 Vektorová derivace jako integrál	32
2.3 Základní věta integrálního počtu	33
2.4 Monogenní funkce a Cauchyho integrální vzorec	34
<b>3 Mechanika tuhého tělesa za pomoci geometrické algebry</b>	<b>39</b>
3.1 Moment hybnosti	39
3.2 Rotující souřadné systémy	40
3.3 Tuhé těleso a moment setrvačnosti	41
3.4 Hlavní momenty a hlavní roviny	43
3.5 Pohybové rovnice	44
3.6 Symetrický bezsilový setrvačnick	45
<b>4 Geometrická algebra na varietách</b>	<b>47</b>
4.1 Pseudoskalár variety	47

4.2	Shape operátor . . . . .	49
4.3	Paralelní přenos . . . . .	51
	<b>Závěr</b>	<b>53</b>

# Úvod

Vektory jako prvky vektorového prostoru umíme mezi sebou sčítat a umíme je násobit prvkem tělesa. Nabízí se otázka, zda-li by nešly vektory také mezi sebou násobit. V základním kurzu fyziky se většinou setkáváme se dvěma základními součiny vektorů, skalárním a vektorovým. Při skalárním součinu je výsledkem násobení vektorů skalár a geometricky ho pro jednotkové vektory interpretujeme jako cosinus úhlu, který mezi sebou dané vektory svírají. Navíc umožňuje realizovat projekce vektorů do různých podprostorů.

Vektorový součin definujeme pouze v trojrozměrném prostoru a jeho geometrický význam je velmi přímočarý. Pokud jsou oba činitele kolineární, pak je jejich součin roven nulovému vektoru. Pokud tomu tak není, pak jejich lineárním obalem je definována rovina a součin je roven vektoru, který je na tuto rovinu kolmý, společně s činiteli v součinu tvoří pravotočivou bázi a jeho norma je rovna ploše rovnoběžníku se stranami původních činitelů. Zřetelně je geometrický význam vektorového součinu závislý na skalárním součinu, který definuje pojem kolmosti.

V geometrické algebře definujeme nový součin vektorů, kterému budeme říkat geometrický. Jeho výsledkem už nebudou pouze skaláry či vektory, ale nové objekty, které budeme nazývat multivektory. Ukážeme, že skalární a vektorový součin jsou zcela obsaženy v geometrické algebře.

Za otce geometrické algebry považujeme Williama Kingdon Clifford, který ji představil světu v druhé polovině 19. století. Jeho záměrem bylo spojit dohromady Grassmannovu a Hamiltonovu práci. Clifford sjednotil skalární součin a Grassmannem zavedený vnější součin do jednoho součinu, který nazval geometrický. Geometrický součin tak nese informaci o metrických vlastnostech prostoru a umožňuje provádět základní geometrické operace (rotace, projekce, zrcadlení) algebraicky. Navíc má zásadní výhodu, že je pro vektory invertibilní podobně jako Hamiltonovy kvaterniony. Mezi matematiky je Cliffordova konstrukce označována jako Cliffordova algebra a součin v ní jako Cliffordův součin. My zůstaneme u Cliffordova originálního názvu geometrický součin.

Na začátku se budeme věnovat intuitivnímu zavedení geometrické algebry na dvou, tří a  $N$ -dimenzionálním prostoru. Náš přístup nebude zcela matematicky rigorózní a spíš budeme objekty a pojmy zavádět na základě geometrické motivace.

Uvidíme, že geometrická algebra nabízí velmi elegantní způsob pro práci s rotacemi nad rámcem třírozměrného prostoru pomocí rotorů a také krátce nahlédneme do problematiky lineárních zobrazení na geometrické algebře.

Poté se přesuneme na okamžik do oblasti geometrické analýzy, kde zavedeme operátor vektorové derivace  $\nabla$ . S jeho pomocí zobecníme diferenciální operátory z trojrozměrného prostoru do obecné dimenze. Demonstrujeme, jak jednoduše odvodit některé známé diferenciální identity za pomoci geometrického součinu a operátoru  $\nabla$ . Představíme další silný nástroj v podobě orientovaného integrálu, který se od klasického liší zejména tím, že jeho výsledkem už není nutně skalár, ale může jím být libovolný multivektor z dané algebry. Zformulujeme Základní větu integrálního počtu pro orientovaný integrál a s jejím využitím odvodíme zobecnění Cauchyho integrálního vzorce pro libovolnou dimenzi. Nakonec ještě ukážeme, jak vystupují holomorfní funkce v geometrické analýze a následně je zobecníme pojmem monogenické funkce.

Třetí kapitola je věnována aplikaci geometrické algebry trojrozměrného prostoru na úlohu pohybu tuhého tělesa. Pseudovektorové veličiny jako moment hybnosti nahradíme bivektory. K popisu rotace tuhého tělesa použijeme rotor, jenž udává natočení daného tělesa v prostoru. Přeformulujeme Eulerovy setrvačnickové rovnice a nakonec tento přístup demonstrujeme na úloze bezsilového symetrického setrvačnicku.

Na závěr se krátce budeme věnovat geometrii vnořených variet. Ukážeme si, jak pomocí prvků geometrické algebry jednoduše pracovat s tečným prostorem. Zavedeme na varietě tzv. shape operátor, který udává, jakým způsobem se stáčí tečný prostor při pohybu na varietě. Toto pozorování nás vede k tomu uvažovat paralelní přenos ne nutně tečného vektoru jakožto rotaci daného vektoru v prostoru, kde je varieta vnořená. To nám umožní jednoduše rozšířit paralelní přenos z vektorů na obecné multivektory. Jakmile jsme vybaveni paralelním přenosem, můžeme zavést kovariantní derivaci a následně křivost jako míru nekomutativity kovariantních derivací v různých směrech.

# Kapitola 1

## Konstrukce a základní vlastnosti geometrické algebry

### 1.1 Komplexní čísla a $\mathcal{G}_2$

Geometrický význam operací sčítání a násobení na komplexních číslech je obecně známý. Operace sčítání reprezentuje sčítání vektorů v  $\mathbb{R}^2$ . Pro operaci násobení je výhodnější uvažovat komplexní číslo ve tvaru modulu a fáze:

$$re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = (rr')e^{i(\theta+\theta')}. \quad (1.1.1)$$

Výsledkem násobení dvou komplexních čísel je komplexní číslo, které má fázi rovnu součtu fází a jeho modul je součinem modulů. Toto pozorování vede přirozeně k zavedení rotací v komplexní rovině pomocí komplexních čísel ležících na jednotkové kružnici. Rotace komplexního čísla  $a$  o úhel  $\theta$  je pak dána transformací

$$a \longmapsto a \cdot e^{i\theta}. \quad (1.1.2)$$

Ukážeme, že komplexní čísla jsou plně obsažena v geometrické algebře konstruované nad  $\mathbb{R}^2$ . Prvně ale potřebujeme zavést geometrický součin a prozkoumat prvky nově vzniklé algebry. Podrobnějším zavedením se v tuto chvíli zaobírat nebudeme, neboť mu je věnována část 1.3. Pro nás jsou v tento moment důležité následující vlastnosti geometrického součinu:

1. součin je asociativní a není obecně komutativní,
2. platí pro něj distributivní zákon vůči sčítání,
3. kvadrát vektoru dává jeho normu.

Geometrický součin budeme značit prázdným symbolem, podobně jako násobení skalárů.

Máme-li  $e_1, e_2$  standardní ortonormální bázi  $\mathbb{R}^2$ , pak postulujeme, že spolu bazické vektory antikomutují v geometrickém součinu. Uvidíme, že tento postulát není nutný a v části 1.3 ukážeme, že symetrická část geometrického součinu vektorů odpovídá skalárnímu součinu. Z bazických vektorů můžeme získat skrze geometrický součin skaláry, vektory a navíc i nový typ objektu  $B = e_1e_2$ , který budeme nazývat bivektor. Dalšími součiny už nové prvky nevygenerujeme, a tak za geometrickou algebru nad  $\mathbb{R}^2$  budeme považovat množinu

$$\mathcal{G}_2 = \text{span} \{1, e_1, e_2, B\} \quad (1.1.3)$$

vybavenou geometrickým součinem a sčítáním. Jelikož spolu bazické vektory antikomutují, pak druhá mocnina  $B$  vyjde

$$B^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -1. \quad (1.1.4)$$

Toto pozorování nás vede k tomu, že bychom komplexní čísla v geometrické algebře mohli reprezentovat jako

$$Z = \alpha + \beta B, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad B = e_1e_2, \quad B^2 = -1.$$

Komplexní číslo tradičně nechápeme jako součet skaláru a bivektoru, ale jako reprezentaci vektoru  $z$  z  $\mathbb{R}^2$  tedy ve tvaru

$$z = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

V geometrické algebře mezi těmito reprezentacemi komplexního čísla existuje jednoduchá bijekce, která umožňuje mezi nimi volně přecházet:

$$\begin{aligned} z \mapsto Z : \quad Z &= e_1 z, \\ Z \mapsto z : \quad z &= e_1 Z. \end{aligned}$$

Přirozeným krokem při zavedení rotací v  $\mathcal{G}_2$  by bylo nahradit  $i$  v exponenciále za  $B$ . Výraz  $e^{\theta B}$  definujeme pomocí mocninné řady:

$$e^{\theta B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta B)^n}{n!} = \cos \theta + B \sin \theta.$$

U transformace  $Z' = e^{\theta B} Z$  můžeme díky výše uvedené bijekci přejít od multivektoru  $Z$  k vektoru  $z$ ,

$$\begin{aligned} e_1 z' &= e^{\theta B} e_1 z, \\ z' &= e_1 e^{\theta B} e_1 z. \end{aligned}$$

Dalšími algebraickými úpravami získáme

$$e_1 e^{\theta B} e_1 = e_1 (\cos \theta + B \sin \theta) e_1 = \cos \theta - B \sin \theta = e^{-\theta B}.$$

Finální transformační vztah je pak tvaru

$$z' = e^{-\theta B} z. \quad (1.1.5)$$

Stačí už jenom ověřit, že tento předpis doopravdy generuje rotaci v  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} e^{-\theta B} z &= (\cos \theta - B \sin \theta) (\alpha e_1 + \beta e_2) \\ &= \alpha \cos \theta e_1 - e_1 e_2 e_1 \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta e_2 - e_1 e_2 e_2 \beta \sin \theta \\ &= (\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) e_1 + (\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) e_2. \end{aligned}$$

Bazické vektory s bivektorem  $B$  antikomutují, a proto s ním antikomutuje i libovolný vektor  $z$ . Rozepíšeme-li exponenciálu jako mocninnou řadu a prokomutujeme vektor  $z$  člen po členu, dostaneme

$$e^{-\theta B} z = z e^{\theta B}. \quad (1.1.6)$$

Nakonec můžeme transformační vztah pro rotaci přepsat do tvaru, který bude souhlasit i s předpisem pro vyšší dimenze:

$$z' = e^{-\frac{\theta}{2} B} z e^{\frac{\theta}{2} B}. \quad (1.1.7)$$

Geometricky můžeme chápat bivektor  $B$  jako orientovaný rovnoběžník se stranami  $e_1, e_2$  a jednotkovým obsahem. Jelikož v  $\mathbb{R}^2$  nemá smysl mluvit o ose rotace, můžeme říkat, že  $B$  je zároveň generátorem rotace v rovině, ve které leží. Vektory jím vynásobené jsou rotovány o  $\pi/2$  ve směru od  $e_1$  k  $e_2$ . Uvidíme dále, že tento pohled na rotaci je mnohem přirozenější než tradiční přístup pomocí osy rotace a že je pak jednodušší hovořit o rotacích nad rámeček  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.2 Geometrická algebra nad $\mathbb{R}^3$

Oproti rovině je geometrická algebra prostoru o něco bohatší a uvidíme, že v sobě obsahuje mnoho známých konceptů jak z fyziky, tak matematiky.

Konstrukci započneme výběrem ortonormální báze, kterou označíme  $e_1, e_2, e_3$ . Podobně jako u dvourozměrného prostoru požadujeme, aby spolu tyto bazické vektory antikomutovali v geometrickém součinu. Vynásobením vektorů báze mezi sebou v různých kombinacích získáme skaláry, vektory, už známé bivektory a nový prvek, který budeme značit  $I = e_1 e_2 e_3$ . Všechny tyto prvky jsou znázorněny na

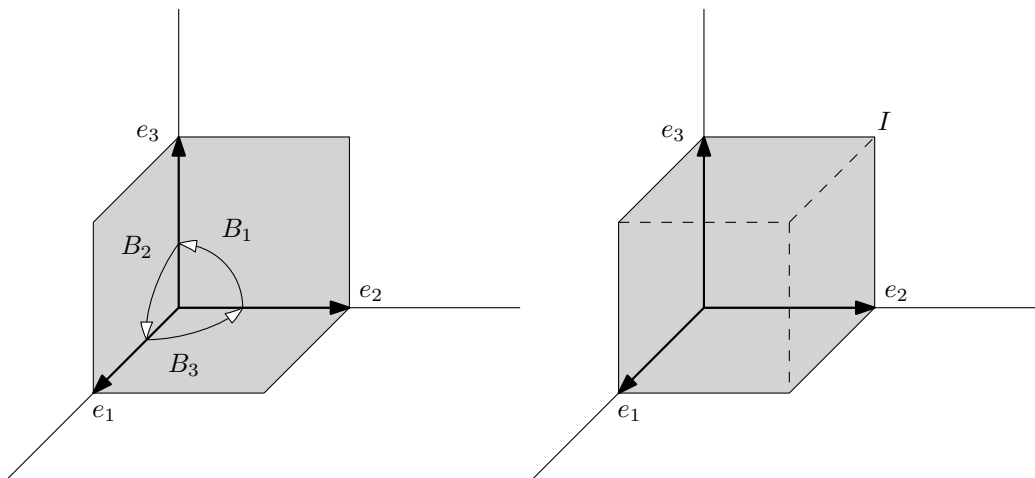
obrázku 1.1.  $I$  je trivektor, také je v algebře až na násobek jediný a z toho důvodu mu budeme říkat pseudoskalár. Obecně budeme pseudoskalárem nazývat multivektor, který je součinem všech bazických vektorů. V této algebře se dále nachází tři lineárně nezávislé bivektory

$$B_1 = e_2e_3, \quad B_2 = e_3e_1, \quad B_3 = e_1e_2, \quad (1.2.1)$$

kde značení  $B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}e_je_k$  (používáme Einsteinovu sumaci) je voleno kvůli jednodušším manipulacím později. Množina, kterou nazveme  $\mathcal{G}_3$ , vznikne podobně jako  $\mathcal{G}_2$  lineárními kombinacemi prvků

$$\{1, e_1, e_2, e_3, B_1, B_2, B_3, I\}.$$

V předchozí části jsme identifikovali souvislost mezi rovinou a bivektorem. Není žádným překvapením, že v  $\mathbb{R}^3$  máme právě tři lineárně nezávislé bivektory, neboť v prostoru máme tři navzájem různé kolmé roviny. Pokud bivektory jistým způsobem představují roviny, pak není až tak překvapivé, že trivektor  $I$  můžeme chápat jako orientovaný rovnoběžnostěn se stranami určenými vektory  $e_1, e_2, e_3$ . Pseudoskalár  $I$  má jednotkový objem a orientaci, které říkáme pravotočivá. Od trivektoru s jednotkovým objemem a levotočivou orientací se  $I$  liší pouze o znaménko.



Obrázek 1.1: Geometrická interpretace bivektorů a trivektoru v trojrozměrném prostoru.

Podprostor vektorů a podprostor bivektorů mají v  $\mathcal{G}_3$  stejnou dimenzi, a proto lze mezi nimi přecházet jistým izomorfismem. Pokusíme se toto přiřazení popsat nejprve geometricky. Pokud máme bivektor  $B$ , potom bychom k němu chtěli přiřadit vektor  $a$ , který je kolmý na rovinu, ve které leží  $B$ , a naopak vektoru



$a$  bychom chtěli přiřadit rovinu, na kterou je kolmý, a aby navíc součin  $aB$  měl pravotočivou orientaci. Mezi bazickými vektory a bivektory platí vztah

$$B_i = Ie_i = e_i I, \quad (1.2.2)$$

$$e_i = -IB_i = -B_i I. \quad (1.2.3)$$

Toto přiřazení odpovídá našemu geometrickému požadavku. Například bazickému vektoru  $e_1$  je přiřazen bivektor  $B_1 = e_2 e_3$ . Ten odpovídá rovině dané vektory  $e_2$  a  $e_3$ , na které je  $e_1$  kolmý. Skrze linearitu je toto zobrazení zadáno pro všechny vektory  $a$  a bivektory  $B$ :

$$B = Ia = aI, \quad (1.2.4)$$

$$a = -IB = -BI. \quad (1.2.5)$$

### 1.2.1 Rotace v $\mathbb{R}^3$

V části 1.1 jsme avizovali, že bivektory jsou úzce spojeny s rotacemi. Rotovaný vektor  $a$  můžeme rozložit na část  $a_\perp$  kolmou na rovinu rotace a na část  $a_\parallel$  ležící v rovině rotace. Rotace ponechává část  $a_\perp$  nezměněnou a s částí  $a_\parallel$  se provede rotace v rovině stejně jako v  $\mathbb{R}^2$ . Je-li rovina rotace dána jednotkovým bivektorem  $B$ , tj.  $B^2 = -1$ , můžeme v rovině najít dvojici ortonormálních vektorů  $a_1, a_2$  takových, že  $B = a_1 a_2$ . Část  $a_\parallel$  se bude transformovat podle (1.1.7) jako

$$a'_\parallel = e^{-\frac{\theta}{2}B} a_\parallel e^{\frac{\theta}{2}B}. \quad (1.2.6)$$

Vektor  $a_\perp$  antikomutuje s vektory  $a_1, a_2$ , a proto komutuje s  $B$ , z toho plyne, že komutuje i s exponenciálou z  $B$

$$a'_\perp = a_\perp = e^{-\frac{\theta}{2}B} a_\perp e^{\frac{\theta}{2}B}. \quad (1.2.7)$$

Rotace vektoru v trojrozměrném prostoru je ve tvaru (1.1.7) jako rotace ve dvou rozměrech

$$a' = e^{-\frac{\theta}{2}B} a e^{\frac{\theta}{2}B}. \quad (1.2.8)$$

### 1.2.2 Reprezentace $\mathcal{G}_3$ pomocí matic

Součin vektorů standardní báze můžeme díky volbě bivektorů  $B_i$  a dualitě mezi vektory a bivektory zapsat následujícím způsobem s využitím Einsteinovy sumace

$$e_i e_j = \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} B_k = \delta_{ij} + I \varepsilon_{ijk} e_k. \quad (1.2.9)$$

Připomeneme-li, co platí pro součin Pauliho matic

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (1.2.10)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

je evidentní, že  $\mathcal{G}_3$  lze reprezentovat pomocí  $2 \times 2$  komplexních matic nad *reálným* tělesem. Skaláry odpovídají násobkům jednotkové matice, samotné Pauliho matice odpovídají bazickým vektorům, bivektorům odpovídají  $i$ -násobky Pauliho matic a pseudoskaláru odpovídá  $i$ -násobek jednotkové matice, tím dostáváme 8 lineárně nezávislých matic nad reálným tělesem.

### 1.3 Geometrická algebra v obecné dimenzi

V matematice se obvykle geometrická algebra označuje jako Cliffordova algebra. Jelikož nás nezajímá kategorizace této algebraické struktury, ale její aplikace v geometrii a ve fyzice, budeme místo Cliffordovy algebry používat označení geometrická algebra.

Existují různé definice geometrické algebry, které nakonec vedou ke stejné algebře. Několik příkladů lze nalézt v [1, str. 188-199]. Naše zavedení nebude zcela rigorózní a bude zejména inspirované modernějším přístupem Dorana a Lasenbyho v [2]. Některé výsledky a odvození si vypůjčíme i od Hestenesa [3]. Budeme vždy uvažovat reálný vektorový prostor konečné dimenze vybavený regulární kvadratickou formou  $Q$ . Mezi vektory zavedeme součin, jehož výsledkem bude obecně objekt, který nazýváme multivektor. Ty budeme obvykle značit velkými písmeny. Součin musí splňovat následující tři požadavky

1. je asociativní,

$$A(BC) = (AB)C, \tag{1.3.1}$$

2. je distributivní vůči sčítání vektorů,

$$A(B + C) = AB + AC, \tag{1.3.2}$$

$$(A + B)C = AC + BC, \tag{1.3.3}$$

3. pro každý vektor  $a$  platí  $a^2 = Q(a) = \|a\|^2$ .

Právě poslední požadavek odlišuje geometrickou algebru od volné asociativní algebry generované nad nějakým vektorovým prostorem. Geometrická algebra může být také definována jako faktorizace volné tenzorové algebry podle oboustranného ideálu generovaného prvky  $a \otimes a - Q(a)$  [1, str. 193].

Postulujeme, že multivektory tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel. Každý multivektor lze zapsat jako součet součinů vektorů. Geometrickou

algebru generovanou z vektorového prostoru vybaveného nedegenerovanou kvadratickou formou  $Q$  se signaturou  $(p, q)$  budeme značit  $\mathcal{G}(p, q)$ , v případě, že nezáleží na konkrétní signatuře, budeme užívat značení  $\mathcal{G}_N$ ,  $N = p + q = \dim V$ .

Součin dvou vektorů můžeme rozdělit na symetrickou a antisymetrickou část

$$a \cdot b = \frac{1}{2} (ab + ba), \quad (1.3.4)$$

$$a \wedge b = \frac{1}{2} (ab - ba), \quad (1.3.5)$$

$$ab = a \cdot b + a \wedge b. \quad (1.3.6)$$

Symetrická část odpovídá skalárnímu součinu (symetrické bilineární formě) indukovaného kvadratickou formou  $Q$  skrze polarizační identitu

$$Q(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = Q(a) + Q(b) + 2(a \cdot b). \quad (1.3.7)$$

Symetrická část je skalárem a budeme ji nazývat vnitřní součin. Antisymetrickou část budeme nazývat vnější součin a jejím výsledkem bude bivektor. Vnější součin  $r$  vektorů definujeme jako totálně antisymetrizovaný součet jejich součinů

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_r = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in S_r} \text{sgn}(\pi) a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(r)}, \quad (1.3.8)$$

kde suma prochází všechny možné permutace  $\pi$  prvků  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Antisymetrie vnějšího součinu zaručuje, že součin je nulový, pokud jsou dva libovolné vektory stejné a tím pádem je nulový, pokud jsou vektory v součinu lineárně závislé. Pro soubor vektorů  $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$  ortogonálních vůči vnitřnímu součinu přechází vnější součin na geometrický díky antikomutativitě ortogonálních vektorů

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_r = e_1 e_2 \dots e_r. \quad (1.3.9)$$

Pro vektory  $a_1, a_2, \dots, a_r$  lze vždy najít ortogonální vektory  $e_1, e_2, \dots, e_r$  takové, že

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_r = e_1 e_2 \dots e_r. \quad (1.3.10)$$

V eukleidovských prostorech toho můžeme docílit Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. V případě, že kvadratická forma  $Q$  není pozitivní, můžeme uvažovat matici

$$\mathbb{G}_{ij} = a_i \cdot a_j, \quad (1.3.11)$$

kteřá je symetrická a tím pádem diagonalizovatelná na diagonální matici  $\mathbb{D}$  skrze ortogonální matici  $\mathbb{X}$

$$\mathbb{X} \mathbb{G} \mathbb{X}^{-1} = \mathbb{D}. \quad (1.3.12)$$

Matrice  $\mathbb{X}$  definuje nový soubor vektorů  $\{e_k\}$

$$e_k = \mathbb{X}_{kj} a_j, \quad (1.3.13)$$

kde stejně jako dále v textu používáme sumační konvenci. Pro nové vektory platí

$$e_i \cdot e_j = (\mathbb{X}_{ik} a_k) \cdot (\mathbb{X}_{jl} a_l) = \mathbb{X}_{ik} \mathbb{X}_{jl} \mathbb{G}_{kl} = \mathbb{D}_{ij}. \quad (1.3.14)$$

Z toho plyne, že v geometrickém součinu spolu antikomutují, a proto

$$\begin{aligned} e_1 e_2 \dots e_r &= e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_r \\ &= (\mathbb{X}_{1k_1} a_{k_1}) \wedge (\mathbb{X}_{2k_2} a_{k_2}) \wedge \dots \wedge (\mathbb{X}_{rk_r} a_{k_r}) \\ &= \det(\mathbb{X}) a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_r, \end{aligned}$$

kde determinant vyjde díky totální antisymetrizaci ve vnějším součinu. Navíc  $\det(\mathbb{X}) = \pm 1$ , kde záporného znaménka se můžeme zbavit prohozením pořadí dvou vektorů nové báze.

Vnější součin nám dovoluje zavést řád multivektoru tak, že vnější součin  $r$  vektorů má řád  $r$ . Pokud se dá multivektor zapsat jako vnější součin vektorů, řekneme, že je rozložitelný. Rozložitelné multivektory řádu  $r$  budeme nazývat převzatým výrazem  $r$ -blade. Lineární kombinace  $r$ -bladů tvoří podprostor geometrické algebry, protože součin  $s$  antikomutujících vektorů nelze zapsat jako součet součinů  $r, r \neq s$ , antikomutujících vektorů. Obecně má multivektor řád  $r$ , pokud lze zapsat jako lineární kombinace  $r$ -bladů, takový multivektor budeme zkráceně nazývat  $r$ -vektor. Multivektory psané velkými písmeny s indexem např.  $A_r$  budeme považovat za  $r$ -vektory, pokud nebude řečeno jinak.

Zvolíme-li nyní ortonormální bázi  $\{e_k\}$  vektorového prostoru, ze kterého algebru generujeme, pak součin  $r$  různých bazických vektorů bude díky vzájemné antikomutativitě totálně antisymetrický a tedy  $r$ -bladem. Označíme-li podprostor  $r$ -vektorů v  $\mathcal{G}_N$  jako  $\mathcal{G}_N^r$  a  $\mathcal{G}_N^0 \equiv \mathbb{R}$ , můžeme  $\mathcal{G}_N$  napsat jako direktní součet těchto podprostorů

$$\mathcal{G}_N = \bigoplus_{r=0}^N \mathcal{G}_N^r. \quad (1.3.15)$$

Dimenze každého podprostoru je dána jako počet  $r$ -prvkových podmnožin v množině o  $N$  prvcích, protože záměna pořadí vektorů v součinu má vliv pouze na výsledné znaménko. Dimenze je tedy dána kombinačním číslem

$$\dim \mathcal{G}_N^r = \binom{N}{r}. \quad (1.3.16)$$

Z toho plyne, že dimenze celé geometrické algebry je

$$\dim \mathcal{G}_N = \sum_{r=0}^N \dim \mathcal{G}_N^r = \sum_{r=0}^N \binom{N}{r} = 2^N. \quad (1.3.17)$$

Díky (1.3.15) můžeme zavést  $\langle \rangle_r$  operátor projekce na podprostor  $r$ -vektorů. Pro obecný multivektor  $A$  nazýváme hodnotu  $\langle A \rangle_r$   $r$ -vektorová část  $A$ . Zároveň budeme používat značení pro projekci na skaláry, kde budeme dolní index vynechávat

$$\langle A \rangle_0 \equiv \langle A \rangle. \quad (1.3.18)$$

Abychom redukovali počet závorek, zavedeme pořadí operací tak, že vnitřní, vnější a později definovaný komutátorový součin mají přednost před geometrickým součinem. Například  $a \cdot b c = (a \cdot b)c$ .

S využitím asociativity geometrického součinu a vztahu  $ab = 2(a \cdot b) - ba$  pro dva vektory  $a, b$  můžeme součin vektoru  $a$  s  $r$ -ticí vektorů  $a_1, a_2, \dots, a_r$  vyjádřit

$$\begin{aligned} aa_1 a_2 \dots a_r &= 2a \cdot a_1 a_2 \dots a_r - a_1 a a_2 \dots a_r \\ &= 2a \cdot a_1 a_2 \dots a_r - 2a \cdot a_2 a_1 a_3 \dots a_r + a_1 a_2 a a_3 \dots a_r \\ &= \dots \\ &= 2 \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \cdot a_k a_1 \dots \check{a}_k \dots a_r + (-1)^r a_1 \dots a_r a, \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

kde háček značí, že je daný symbol ve výrazu vynechán. Vezmeme-li za  $a_1, a_2, \dots, a_r$   $r$ -tici antikomutujících vektorů  $e_1, e_2, \dots, e_r$ , jejichž součin tím pádem dává nějaký  $r$ -blade  $A_r = e_1 e_2 \dots e_r$ , můžeme psát

$$\frac{1}{2} (a A_r - (-1)^r A_r a) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \cdot e_k e_1 \dots \check{e}_k \dots e_r. \quad (1.3.20)$$

Napravo se sčítají součiny  $r - 1$  antikomutujících vektorů tedy  $(r - 1)$ -vektory. Z toho pak plyne, že i výraz na levé straně musí být  $(r - 1)$ -vektor. Budeme ho značit

$$a \cdot A_r = \frac{1}{2} (a A_r - (-1)^r A_r a). \quad (1.3.21)$$

Takto definovaný vnitřní součin je ve schodě s naší předchozí definicí vezmeme-li za  $A_r$  nějaký vektor  $b$  (multivektor řádu 1). Dále ukážeme, že zbývající část součinu odpovídá vnějšímu součinu

$$a \wedge A_r = a A_r - a \cdot A_r = \frac{1}{2} (a A_r + (-1)^r A_r a). \quad (1.3.22)$$

Důkaz provedeme indukcí. Pro  $r = 1$  dostáváme

$$\frac{1}{2} (a e_1 - e_1 a) = a \wedge e_1, \quad (1.3.23)$$

což odpovídá definici vnějšího součinu. Pro indukční krok předpokládáme, že vztah platí pro  $(r-1)$ -vektory. Vnější součin rozepíšeme podle definice a upravíme

$$\begin{aligned} a \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_r &= \frac{1}{r+1} a e_1 e_2 \dots e_r \\ &+ \frac{1}{r+1} \sum_{k=1}^r (-1)^k e_k (a \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \check{e}_k \wedge \dots \wedge e_r). \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Využijeme indukčního předpokladu a upravíme

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^r (-1)^k e_k (a \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \check{e}_k \wedge \dots \wedge e_r) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (-1)^k e_k (a e_1 \dots \check{e}_k \dots e_r + (-1)^{r-1} e_1 \dots \check{e}_k \dots e_r a) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (-1)^k e_k a e_1 \dots \check{e}_k \dots e_r + \frac{r}{2} (-1)^r e_1 e_2 \dots e_r a \\ &= \sum_{k=1}^r (-1)^k (a \cdot e_k) e_1 \dots \check{e}_k \dots e_r + \frac{r}{2} (a e_1 \dots e_r + (-1)^r e_1 \dots e_r a) \\ &= -\frac{1}{2} (a e_1 \dots e_r - (-1)^r e_1 \dots e_r a) + \frac{r}{2} (a e_1 \dots e_r + (-1)^r e_1 \dots e_r a) \\ &= \frac{r-1}{2} a e_1 \dots e_r + \frac{r+1}{2} (-1)^r e_1 \dots e_r a. \end{aligned}$$

Dosadíme-li toto do (1.3.24) získáme okamžitě

$$a \wedge A_r = \frac{1}{2} (a A_r + (-1)^r A_r a). \quad (1.3.25)$$

Součin vektoru  $a$  a  $r$ -vektoru tedy můžeme rozdělit na část s řádem o jedna menší a vyšší

$$a A_r = \langle a A_r \rangle_{r-1} + \langle a A_r \rangle_{r+1}, \quad (1.3.26)$$

kde

$$a \cdot A_r = \langle a A_r \rangle_{r-1}, \quad a \wedge A_r = \langle a A_r \rangle_{r+1}. \quad (1.3.27)$$

S využitím rozkladu součinu vektoru  $a$  a  $r$ -vektoru můžeme opakovanou aplikací odvodit rozklad pro součin  $r$ -bladu a nějakého  $s$ -vektoru

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \dots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s}. \quad (1.3.28)$$

Jelikož součin je distributivní a projektoři lineární, platí tento rozklad pro součin libovolného  $r$ -vektoru a  $s$ -vektoru. Vnitřnímu a vnějšímu součinu budou odpovídat

nejnižší a nejvyšší řád v rozkladu

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|}, \quad (1.3.29)$$

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s}. \quad (1.3.30)$$

Asociativita vnějšího součinu přímo plyne z rozkladu (1.3.28) a asociativity geometrického součinu:

$$(A_r \wedge B_s) \wedge C_t = \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \wedge C_t = \langle (A_r B_s) C_t \rangle_{r+s+t} = \langle A_r (B_s C_t) \rangle_{r+s+t}. \quad (1.3.31)$$

Podobnou argumentací lze dokázat vztah

$$A_r \cdot (B_s \cdot C_t) = (A_r \wedge B_s) \cdot C_t \quad r + s \leq t; r, s > 0, \quad (1.3.32)$$

který se ukáže užitečný zejména pro vektory

$$a \cdot (b \cdot A_r) = (a \wedge b) \cdot A_r, \quad r \geq 2. \quad (1.3.33)$$

Při práci s geometrickým součinem, který je nekomutativní, hojně využijeme operaci reverze, neboli obrácení pořadí násobení. Reverze na součin vektorů působí

$$\widetilde{(ab \dots c)} = c \dots ba. \quad (1.3.34)$$

Na  $r$ -blady její působení můžeme odvodit tak, že daný  $r$ -vektor  $A_r$  rozepíšeme na součin  $r$  antikomutujících vektorů

$$\tilde{A}_r = \widetilde{(e_1 e_2 \dots e_r)} = e_r \dots e_2 e_1 = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} e_1 e_2 \dots e_r. \quad (1.3.35)$$

U  $r$ -bladů tedy dojde na základě řádu ke změně znaménka

$$\tilde{A}_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} A_r. \quad (1.3.36)$$

Operaci reverze pak lineárně dodefinujeme pro libovolný multivektor.

Na geometrické algebře můžeme zavést také skalární součin dvou multivektorů  $A$  a  $B$  jako

$$\langle \tilde{A} B \rangle. \quad (1.3.37)$$

Navíc podle (1.3.28) můžeme usoudit

$$\langle \tilde{A}_r B_s \rangle = 0 \quad r \neq s, \quad (1.3.38)$$

$$\langle \tilde{A}_r B_r \rangle = \tilde{A}_r \cdot B_r = \tilde{B}_r \cdot A_r = \langle \tilde{B}_r A_r \rangle. \quad (1.3.39)$$

Linearita plyne z distributivních zákonů pro geometrický součin a linearity projekce. Vidíme, že jednotlivé podprostory  $\mathcal{G}_n^r$  jsou při tomto součinu navzájem ortogonální. Pozitivní definitnost pak stačí ověřit pro blady. Mějme  $A_r = e_1 \dots e_r$ , potom

$$\|A_r\|^2 = \langle \tilde{A}_r A_r \rangle = e_r \dots e_1 e_1 \dots e_r = \|e_1\|^2 \|e_2\|^2 \dots \|e_r\|^2 \geq 0, \quad (1.3.40)$$

nacházíme-li se v eukleidovském prostoru. V eukleidovském prostoru se jedná o skalární součin, který na geometrické algebře indukuje i normu, a tak lze algebru chápat jako normovaný vektorový prostor. Norma na geometrické algebře je podstatná pro geometrickou analýzu.

Nyní se krátce vrátíme k vektorovému součinu. Mějme dva lineárně nezávislé vektory  $a$  a  $b$ . Úhel mezi nimi označíme  $\theta$ , potom algebraickými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} (a \wedge b)^2 &= (m \cdot n)^2 - a^2 b^2 \\ &= (\cos^2 \theta - 1) \|a\|^2 \|b\|^2 = -\|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

Norma bivektoru  $a \wedge b$  tedy odpovídá obsahu rovnoběžníku se stranami danými vektory  $a$  a  $b$ . (Pro obecné  $r$ -blady je jeho norma rovna objemu příslušného rovnoběžnostěnu.) Nyní už je jasné, že vektorový součin není nic jiného než bivektor zobrazený na vektor podle (1.2.5):

$$a \times b = -I a \wedge b. \quad (1.3.42)$$

Je evidentní, že v rámci geometrické algebry je vektorový součin zbytečný a symbol  $\times$  uvolníme ve prospěch komutátoru dvou multivektorů  $A$  a  $B$ , který definujeme:

$$A \times B = \frac{1}{2}(AB - BA). \quad (1.3.43)$$

Má několik společných vlastností s komutátorem matic, které zde nebudeme dokazovat. Je antisymetrický, lineární, splňuje Jacobiho identitu

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0 \quad (1.3.44)$$

a splňuje Leibnizovo pravidlo vzhledem ke geometrickému součinu

$$A \times (BC) = (A \times B)C + B(A \times C). \quad (1.3.45)$$

Všimněme si, že komutátor vektoru a bivektoru díky (1.3.21) přechází ve vnitřní součin:

$$a \cdot B = a \times B.$$



### 1.3.1 Pseudoskalár a projekce

Pseudoskalár  $I$  celkové algebry je dán vnějším součinem všech vektorů ortonormální báze daného prostoru. Je to prvek s nejvyšším řádem  $N$  a navíc definuje orientaci daného prostoru. Vynásobíme-li nějaký  $r$ -vektor  $A_r$  s pseudoskalárem  $I$ , dostaneme  $(N - r)$ -vektor. Tomuto přiřazení  $r$ -vektoru a  $(N - r)$ -vektoru říkáme dualita, nebo duál. V prostorech s lichou dimenzí pseudoskalár komutuje s vektory, a tak komutuje se všemi multivektory. Obecně vždy komutuje s multivektory sudého řádu. Tato pozorování můžeme souhrně sepsat

$$IA_r = (-1)^{r(N-1)} A_r I. \quad (1.3.46)$$

Díky pseudoskaláru můžeme zaměňovat vnitřní a vnější součin

$$\begin{aligned} a \cdot (A_r I) &= \frac{1}{2} (a A_r I - (-1)^{N-r} A_r I a) \\ &= \frac{1}{2} (a A_r I - (-1)^{N-r} (-1)^{N-1} A_r a I) \\ &= \frac{1}{2} (a A_r + (-1)^r A_r a) I \\ &= a \wedge A_r I. \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

V této části se omezíme na eukleidovské prostory, abychom se vyhnuli patologickému případu  $r$ -bladů s nulovou normou. V prostoru, kterým generujeme geometrickou algebru, uvažujme nějaký  $r$ -dimenzionální podprostor  $V_r$ . V něm zvolíme ortogonální bázi  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , potom k podprostoru  $V_r$  můžeme přiřadit  $r$ -blade  $A_r$ :

$$A_r = a_1 a_2 \dots a_r. \quad (1.3.48)$$

Naopak vezmeme-li nějaký  $r$ -blade  $A_r$ , můžeme ho napsat jako součin  $r$  antikomutujících vektorů  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , které pak tvoří ortogonální bázi nějakého podprostoru  $V_r$ .

Je evidentní, že toto přiřazení podprostor  $\leftrightarrow$  blade je vzájemně jednoznačné až na skalární násobek. Jednotkový blade přiřazený k podprostoru  $V_r$  budeme nazývat pseudoskalárem podprostoru  $V_r$ , protože stejně jako pseudoskalár celé algebry je dán součinem všech bazických vektorů.

Zajímá-li nás ortogonální projektor na podprostor  $V_r$ , jeho působení můžeme zapsat skrze  $A_r$ :

$$b = b A_r A_r^{-1} = (b \cdot A_r + b \wedge A_r) A_r^{-1}. \quad (1.3.49)$$

Tvrdíme, že ortogonální projekce  $b$  do podprostoru  $V_r$  je dána jako

$$b_{\parallel} = b \cdot A_r A_r^{-1}. \quad (1.3.50)$$

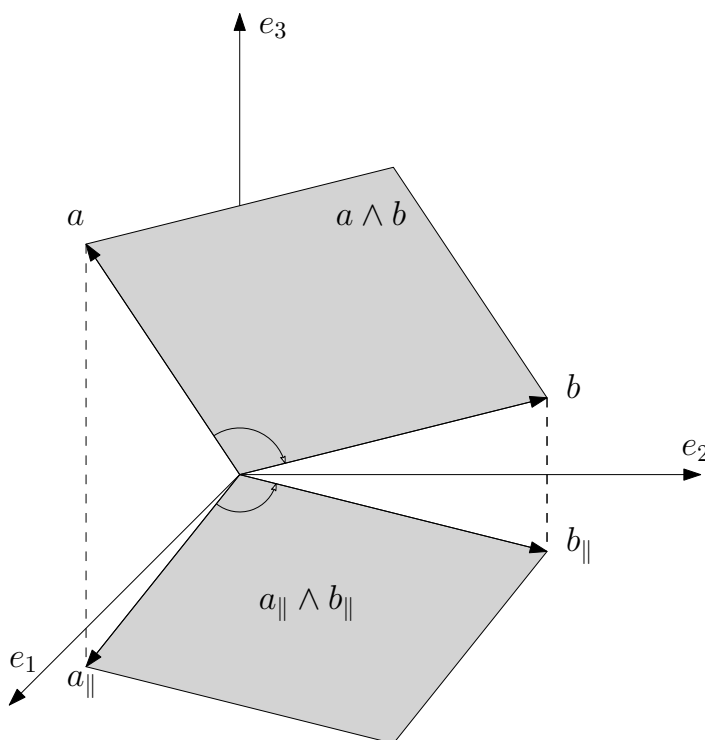
To můžeme nahlédnout rozepíšeme-li součin pomocí (1.3.20)

$$b_{\parallel} = b \cdot A_r A_r^{-1} = \sum_{k=1}^r b \cdot a_k a_k^{-1} = \sum_{k=1}^r b \cdot \frac{a_k}{\|a_k\|} \frac{a_k}{\|a_k\|}, \quad (1.3.51)$$

protože  $a_k^{-1} = \frac{a_k}{\|a_k\|^2}$ . Předpis výše už odpovídá klasické ortogonální projekci. Z toho plyne, že ortogonální projekce do ortogonálního doplňku  $V_r$  je

$$b - b_{\parallel} = b_{\perp} = b \wedge A_r A_r^{-1}. \quad (1.3.52)$$

Stejným předpisem jako pro vektory bychom mohli definovat projekci i pro obecné multivektory, nebudeme zde diskutovat nějak podrobně, proč tomu tak je, ale ilustrujeme projekci multivekturu na příkladu s bivektorem.



Obrázek 1.2: Projekce bivektoru  $a \wedge b$  do podprostoru daného bivektorem  $e_1 e_2$ .

Začneme-li s nějakým bivektorem  $a \wedge b$ , intuitivně bychom projekci do podprostoru daného jednotkovým  $r$ -bladem  $A_r$  definovali jako vnější součin ortogonálních projekcí vektorů  $a$  a  $b$ , viz obr . 1.2,

$$(a \wedge b)_{\parallel} = a_{\parallel} \wedge b_{\parallel}. \quad (1.3.53)$$

V podprostoru daném  $A_r$  zvolíme ortonormální bázi  $a_1, a_2, \dots, a_r$  tak, že rozložíme  $A_r = a_1 a_2 \dots a_r$ . Ukážeme, že z předpisu

$$(a \wedge b)_\parallel = (a \wedge b) \cdot A_r A_r^{-1} \quad (1.3.54)$$

dostaneme naši intuitivní představu (1.3.53). Využijeme vztahu pro vnitřní a vnější součin (1.3.33) a dvakrát za sebou rozepíšeme vnitřní součin jako v (1.3.20)

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \cdot A_r A_r^{-1} &= a \cdot (b \cdot A_r) A_r^{-1} \\ &= a \cdot \left( \sum_{j=1}^r (-1)^{k+1} b \cdot a_j a_1 \dots \check{a}_j \dots a_r \right) A_r^{-1} \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^r (-1)^{i+j} (a \cdot a_i) (b \cdot a_j) a_1 \dots \check{a}_i \dots \check{a}_j \dots a_r a_r \dots a_2 a_1 \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^r (a \cdot a_i) (b \cdot a_j) a_i a_j = \sum_{i,j=1}^r (a \cdot a_i a_i) \wedge (b \cdot a_j a_j) \\ &= a_\parallel \wedge b_\parallel. \end{aligned}$$

Tento vztah pak můžeme lineárně rozšířit na libovolný bivektor  $B$

$$B_\parallel = B \cdot A_r A_r^{-1}. \quad (1.3.55)$$

U bivektorů a obecně ostatních multivektorů už neplatí, že zbytek po odečtení ortogonální projekce dává část ležící zcela v ortogonálním doplňku. Toto je jasné z jednoduché úvahy pro blade  $a \wedge b$

$$a \wedge b = (a_\parallel + a_\perp) \wedge (b_\parallel + b_\perp) = a_\parallel \wedge b_\parallel + a_\parallel \wedge b_\perp + a_\perp \wedge b_\parallel + a_\perp \wedge b_\perp. \quad (1.3.56)$$

Je vidět, že dostáváme i části, které leží částečně v prostoru, do kterého jsme prováděli projekci. Pouze výraz  $a_\perp \wedge b_\perp$  leží zcela v ortogonálním doplňku. Část

$$(a \wedge b)_\times = a_\parallel \wedge b_\perp + a_\perp \wedge b_\parallel \quad (1.3.57)$$

budeme nazývat *mixace* bivektoru  $a \wedge b$ , viz obr. 1.3. Ukážeme, že ji můžeme spočítat jako

$$(a \wedge b)_\times = (a \wedge b) \times A_r A_r^{-1}. \quad (1.3.58)$$

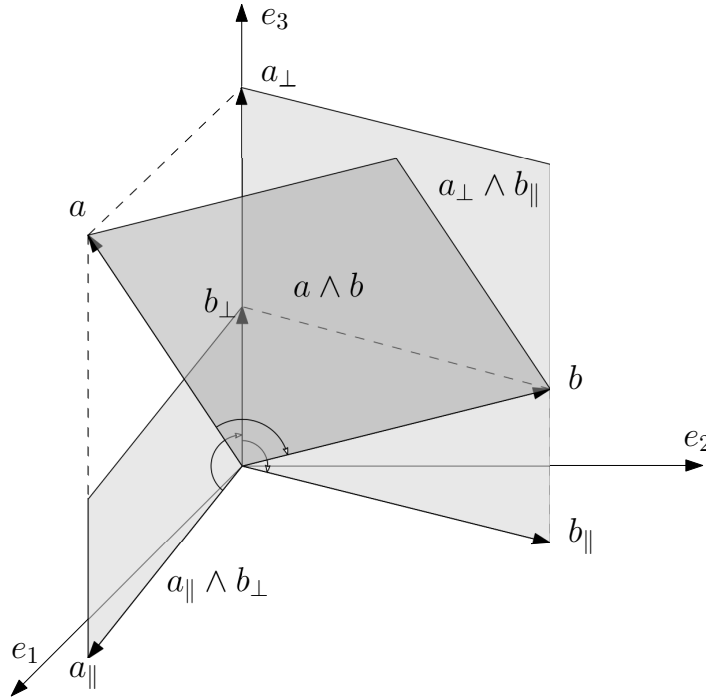
Rozepíšeme-li každý z vektorů na součet projekce a doplňku, pak stačí diskutovat komutativitu těchto částí s  $A_r$ . V podprostoru daném  $A_r$  zvolíme ortonormální bázi  $a_1, a_2, \dots, a_r$  tak, že  $A_r = a_1 a_2 \dots a_r$ . Vektory  $a_\parallel$  a  $b_\parallel$  jsou lineárními kombinacemi těchto vektorů, každý z členů lineární kombinace jednou komutuje a  $(r-1)$ -krát

antikomutuje s vektory tvořící rozklad  $A_r$ . Vektory  $a_\perp$  a  $b_\perp$  jsou kolmé na všechny vektory  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , a proto se všemi antikomutují. Z tohoto pozorování plyne, že součiny  $a_\parallel b_\parallel$ ,  $b_\parallel a_\parallel$ ,  $a_\perp b_\perp$ ,  $b_\perp a_\perp$  komutují s  $A_r$ , a proto i výrazy  $a_\parallel \wedge b_\parallel$ ,  $a_\perp \wedge b_\perp$  komutují s  $A_r$ . Obdobně pak výrazy  $a_\parallel \wedge b_\perp = a_\parallel b_\perp$ ,  $a_\perp \wedge b_\parallel = a_\perp b_\parallel$  antikomutují s  $A_r$  a tak dostáváme

$$(a \wedge b) \times A_r A_r^{-1} = (a_\parallel \wedge b_\perp + a_\perp \wedge b_\parallel) A_r A_r^{-1} = a_\parallel \wedge b_\perp + a_\perp \wedge b_\parallel. \quad (1.3.59)$$

Pro obecný bivektor  $B$  tento vztah definujeme lineárním rozšířením

$$B_\times = B \times A_r A_r^{-1}. \quad (1.3.60)$$



Obrázek 1.3: Obě části tvořící v součtu *mixaci* bivektoru  $a \wedge b$  vzhledem k podprostoru danému bivektorem  $e_1 e_2$ .

Nyní lehce odbočíme, protože máme připravenou půdu pro to, abychom ukázali, že komutátor  $r$ -vektoru s bivektorem je opět  $r$ -vektor. Pro blade  $a \wedge b$  už víme:

$$(a \wedge b) \times A_r = (a_\parallel \wedge b_\perp + a_\perp \wedge b_\parallel) A_r, \quad (1.3.61)$$

vnější součiny na pravé straně můžeme nahradit geometrickými, protože jde o vnější součin ortogonálních vektorů. Výraz  $b_\perp a_\parallel A_r$  je evidentně  $r$ -vektor. Součin  $a_\parallel A_r$  musí být  $(r - 1)$ -vektor, protože

$$a_\parallel \wedge A_r = 0, \quad (1.3.62)$$

a  $b_{\perp}$  je kolmý na všechny vektory v podprostoru daném  $A_r$ , proto součin  $b_{\perp} a_{\parallel} A_r$  je  $r$ -vektorem. Obdobnou argumentací toto dokážeme i pro součin  $a_{\perp} b_{\parallel} A_r$ . Lineárním rozšířením je tento fakt platný i pro obecné bivektory. Vezmeme-li za  $r$ -vektor bivektor, dostaneme výsledek, že komutátor bivektoru s bivektorem je opět bivektor. Navíc díky vlastnostem komutátorového součinu tvoří bivektory s komutátorovým součinem Lieovu algebru.

Zbývající zcela kolmou část nějakého obecného bivektoru  $B$  dostaneme jako

$$B_{\perp} = B \wedge A_r A_r^{-1}, \quad (1.3.63)$$

protože součin bivektoru a  $r$ -vektoru můžeme rozepsat jako

$$B = B A_r A_r^{-1} = (\langle B A_r \rangle_{r-2} + \langle B A_r \rangle_r + \langle B A_r \rangle_{r+2}) A_r^{-1} \quad (1.3.64)$$

$$= (B \cdot A_r + B \times A_r + B \wedge A_r) A_r^{-1} \quad (1.3.65)$$

$$= B_{\parallel} + B_{\times} + B_{\perp}. \quad (1.3.66)$$

### 1.3.2 Zrcadlení a rotace v $\mathbb{R}^N$

V této části budeme vycházet z Cartan-Dieudonného věty, jejíž důkaz lze nalézt například v [4, str. 77-78].

**Věta** (Cartan-Dieudonné). *Bud'  $V$  vektorový prostor nad tělesem reálných čísel dimenze  $N \in \mathbb{N}$  a  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  regulární symetrická bilineární forma na  $V$ . Potom každá ortogonální transformace  $V$  lze zapsat jako složení nejvýše  $N$  zrcadlení.*

Mějme jednotkový vektor  $n$  a chceme podle roviny kolmé na  $n$  zrcadlit vektor  $a$ . Rozložíme  $a$  na část rovnoběžnou s  $n$  a kolmou na  $n$ , tj. rozkládáme do jednorozměrného podprostoru daného  $n$ .

$$a_{\parallel} = a \cdot n n^{-1}, \quad a_{\perp} = a \wedge n n^{-1}. \quad (1.3.67)$$

Zajímá-li nás zrcadlení v rovině kolmé na  $n$ , pak  $a_{\perp}$  zůstane nezměněné a  $a_{\parallel}$  se vynásobí  $(-1)$  a dostaneme

$$a' = -a_{\parallel} + a_{\perp} = (-a \cdot n + a \wedge n) n^{-1} = -(n \cdot a + n \wedge a) n^{-1} = -n a n^{-1}. \quad (1.3.68)$$

Výsledek  $a'$  zrcadlení vektoru  $a$  podle roviny s normálou  $n$  je

$$a' = -n a n^{-1}. \quad (1.3.69)$$

Stejnou transformaci dává i vektor  $-n$ , z toho plyne, že zrcadlení jsou dvojnásobně pokryta jednotkovými vektory. Podle Cartan-Dieudonného věty pak libovolnou ortogonální transformaci  $T$  můžeme zapsat s využitím geometrické algebry jako

$$T(a) = (-1)^k U a \tilde{U}, \quad U = u_k \dots u_1, \quad (1.3.70)$$

kde  $u_1, \dots, u_k, k \leq N$  jsou normálové vektory nadrovin, podle kterých se provádějí zrcadlení, na která lze transformaci  $T$  rozložit. Pro multivektory  $U$  mimo jiné platí

$$U\tilde{U} = \tilde{U}U = (-1)^s, \quad (1.3.71)$$

kde  $s$  je počet vektorů v  $U$ , které mají záporný kvadrát.

Vidíme, že grupu ortogonálních transformací můžeme v geometrické algebře reprezentovat grupou generovanou součiny jednotkových vektorů. Tato reprezentace grupu ortogonálních transformací dvojnásobně pokrývá, neboť multivektor  $-U$  dává stejnou transformaci jako  $U$ . Grupou generovanou součiny jednotkových vektorů nazýváme pin grupou. Prvky pin grupy můžeme rozdělit na prvky tvořené součinem lichého a sudého počtu vektorů, prvky tvořené součinem sudého počtu vektorů tvoří podgrupu, kterou nazýváme spin grupa. Prvky  $R$  spin grupy splňující podmínku  $RR = 1$  se nazývají rotory a tvoří podgrupu spin grupy.

Dále budeme hovořit o rotacích v eukleidovských prostorech, kde jsou spin grupa a grupa rotorů totožné. Mějme nyní příklad jednoduché rotace, která vznikne složením dvou zrcadlení prvně podle nadroviny kolmé k jednotkovému vektoru  $m$  a poté podle nadroviny kolmé k jednotkovému vektoru  $n$ . Označíme  $R = nm$  rotor, který tuto transformaci realizuje. Úhel mezi vektory  $m$  a  $n$  označíme jako  $\frac{\theta}{2}$ . Rotor  $R$  pak můžeme psát ve tvaru

$$R = nm = \cos \frac{\theta}{2} - B \sin \frac{\theta}{2} = e^{-\frac{\theta}{2}B}, \quad B = \frac{m \wedge n}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

$$\tilde{R} = mn = \cos \frac{\theta}{2} + B \sin \frac{\theta}{2} = e^{\frac{\theta}{2}B},$$

kde jsme využili 1.3.41. Rotovaný vektor  $a$  můžeme rozdělit na část  $a_\perp$  kolmou na vektory  $m$  a  $n$ , která pak komutuje s  $R$ , a na část  $a_\parallel$  ležící v rovině dané vektory  $m$  a  $n$ . Rotace daná rotorem  $R$  ponechává  $a_\perp$  nezměněné a  $a_\parallel$  podléhá rotaci o úhel  $\theta$  v rovině dané vektory  $m$  a  $n$

$$Ra\tilde{R} = R(a_\perp + a_\parallel)\tilde{R} = a_\perp R\tilde{R} + e^{-\frac{\theta}{2}B}a_\parallel e^{\frac{\theta}{2}B} = a_\perp + e^{-\frac{\theta}{2}B}a_\parallel e^{\frac{\theta}{2}B}. \quad (1.3.72)$$

Skládáním jednoduchých rotací můžeme získávat složitější rotace, které díky Baker-Campbell-Hausdorffově formuli budou opět dané exponenciálou z bivektoru

$$\exp\left(-\frac{\theta}{2}B\right)\exp\left(-\frac{\varphi}{2}C\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta B + \varphi C) - \frac{1}{4}\theta\varphi(B \times C) + \dots\right), \quad (1.3.73)$$

kde v sumě pak následují vyšší řády komutátorů  $B$  a  $C$ . Jelikož jsou bivektory uzavřené vůči komutátoru, pak výsledek sumy (pokud konverguje) bude také bivektor.

Rotaci vektorů můžeme přímočaře rozšířit na součin vektorů. Řekneme-li, že rotace součinu vektorů  $a_1, a_2, \dots, a_r$  je součin rotovaných vektorů, dostáváme

$$Ra_1\tilde{R}Ra_2\tilde{R}\dots Ra_r\tilde{R} = Ra_1a_2\dots a_r\tilde{R}. \quad (1.3.74)$$

Na základě tohoto výsledku definujeme rotaci libovolného multivektoru  $A$  stejným předpisem, jako máme pro vektory

$$A' = RA\tilde{R}. \quad (1.3.75)$$

Rozvedeme-li tento předpis do prvního řádu v  $\theta$ , získáme podobu infinitesimální rotace

$$R(\theta)A\tilde{R}(\theta) = e^{-\frac{\theta}{2}B}Ae^{\frac{\theta}{2}B} = A + \theta(A \times B) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (1.3.76)$$

### 1.3.3 Reciproká báze

Pojem reciproké báze bude výhodný zejména pro práci se složkami vektorů. Mějme nějakou bázi vektorového prostoru  $\{e_\mu\}$ , potom reciprokou bázi  $\{e^\mu\}$  definujeme vztahem

$$e^\mu \cdot e_\nu = \delta_\nu^\mu, \quad \forall i, j, \quad (1.3.77)$$

kde  $\delta_\nu^\mu$  je Kroneckerovo delta. Vektory reciproké báze úzce souvisí s bází duálního vektorového prostoru tak, že pohybujeme-li se v eukleidovském prostoru, pak pomocí Rieszova lemmatu můžeme vektory duální báze reprezentovat vektory  $\{e^\mu\}$  v původním vektorovém prostoru. Nadále budeme používat Einsteinovu sumační konvenci, že pokud se ve výrazu opakují dva stejné indexy, kdy jeden je nahoře a druhý dole, pak se přes ně sčítá přes všechny možné hodnoty daného indexu. Souřadnice vektoru  $a$  zavedeme klasicky jako koeficienty lineární kombinace

$$a = a^\mu e_\mu = a_\mu e^\mu, \quad (1.3.78)$$

$$a^\mu = a \cdot e^\mu, \quad (1.3.79)$$

$$a_\mu = a \cdot e_\mu. \quad (1.3.80)$$

Zavedeme-li metrický tenzor  $g_{\mu\nu}$  a jeho inverzi  $g^{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu, \quad (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}, \quad (1.3.81)$$

pak pro vektory reciproké báze můžeme psát

$$e^\mu = g^{\mu\nu} e_\nu. \quad (1.3.82)$$

Jednoduše ověříme, že splňují definiční požadavek

$$e^\mu \cdot e_\nu = g^{\mu\sigma} e_\sigma \cdot e_\nu = g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (1.3.83)$$

Metrický tenzor nám dovoluje zvyšovat a snižovat indexy jak u souřadnic, tak u bazických vektorů, potažmo multivektorů.

### 1.3.4 Lineární operátory a multivektory

Lineární operátor  $F$  zobrazující vektorový prostor  $V$  do  $V$  se vyznačuje zejména vlastností linearity

$$F(x + \lambda y) = F(x) + \lambda F(y).$$

Rozšíření lineárního zobrazení  $F$  na multivektory provedeme postupnou konstrukcí. Zaprvé definujeme, jak působí na blady

$$F(a \wedge b \wedge \cdots \wedge c) = F(a) \wedge F(b) \wedge \cdots \wedge F(c), \quad (1.3.84)$$

což je velmi intuitivní přístup. Uvažujme například rotaci. Máme-li bivektor  $a \wedge b$ , který odpovídá nějakému rovnoběžníku, pak po rotaci dané lineárním operátorem  $R$  bychom chtěli, aby byl otočen i rovnoběžník  $a \wedge b$ . Toho dosáhneme jednoduše tím, že otočíme oba dva vektory, které ho definují. Dostaneme  $R(a \wedge b) = R(a) \wedge R(b)$ .

Skrze linearitu můžeme rozšířit působení libovolného lineárního zobrazení  $F$  na všechny multivektory v dané algebře s tím, že pro skaláry definujeme:

$$F(\alpha) = \alpha. \quad (1.3.85)$$

Z konstrukce je pak jasné, že výsledné zobrazení  $F$  bude lineárním zobrazením na dané geometrické algebře

$$F(A + \lambda B) = F(A) + \lambda F(B). \quad (1.3.86)$$

Rozšíření lineárních operátorů na celou geometrickou algebru nabízí hlubší vzhled do spektrální teorie. Vlastní číslo  $\lambda$  a příslušný vlastní vektor  $e$  lineárního operátor  $F$  jsou dány rovnicí

$$F(e) = \lambda e. \quad (1.3.87)$$

Vlastní čísla  $\lambda$  se pak hledají jako kořeny charakteristické rovnice

$$\det(F - \lambda \text{id}) = 0, \quad (1.3.88)$$

kde  $\text{id}$  značí identický operátor. Kořeny této rovnice mohou obecně vyjít jako komplexní čísla. Je zvláštní, proč by nám pro reálný lineární operátor na reálném vektorovém prostoru měla vyjít komplexní vlastní čísla. Vhled nabízí koncept vlastních bladů, kterým rozšíříme pojem vlastního vektoru.  $A_r$  je vlastní  $r$ -blade příslušný k vlastnímu číslu  $\lambda$  lineárního operátoru  $F$ , pokud splňuje rovnici

$$F(A_r) = \lambda A_r. \quad (1.3.89)$$

Typickým zástupcem operátorů s komplexními vlastními čísly je operátor rotace. Pro určitost si vezmeme rotaci v trojrozměrném prostoru o úhel  $\theta$  v rovině dané bivektorem  $B_3$ , tj. v rovině  $xy$ . Operátor rotace  $R$  má spektrum

$$\sigma(R) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}. \quad (1.3.90)$$



Operátor rotace  $R$  je zprostředkován rotorem  $R = e^{-\frac{\theta}{2}B_3}$ , proto dostáváme

$$R(B_3) = e^{-\frac{\theta}{2}B_3} B_3 e^{\frac{\theta}{2}B_3} = B_3. \quad (1.3.91)$$

$B_3$  je tedy vlastní bivektor s vlastním číslem 1, což dává geometricky smysl, protože rovina daná bivektorem  $B_3$  při rotaci zůstává nezměněna.

Dá se ukázat, že pseudoskalár  $I$  patřičné geometrické algebry je vlastní multivektor všech lineárních operátorů s příslušným vlastním číslem je determinant daného lineárního operátoru

$$F(I) = \det(F)I. \quad (1.3.92)$$



# Kapitola 2

## Základní pojmy geometrické analýzy

V této kapitole se budeme zabývat základními pojmy geometrické analýzy, jako jsou funkce s oborem hodnot v geometrické algebře, vektorová derivace a nakonec orientovaný integrál. Pro jednoduchost se budeme zabývat pouze funkcemi definovanými na  $\mathbb{R}^N$ .

### 2.1 Operátor vektorové derivace

Jelikož na geometrické algebře umíme zavést normu multivektoru díky skalárnímu součinu (1.3.37), lze ji považovat za normovaný vektorový prostor, a proto v ní máme dobře definovaný pojem limity. To nám umožňuje definovat derivaci funkce  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}_N$  pomocí limity

$$\frac{dF}{d\tau}(\tau_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\tau_0 + \varepsilon) - F(\tau_0)}{\varepsilon}. \quad (2.1.1)$$

Pro funkci  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{G}_N$  můžeme pomocí limity definovat směrovou derivaci ve směru nějakého vektoru  $a \in \mathbb{R}^N$

$$a \cdot \nabla F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon a) - F(x)}{\varepsilon}. \quad (2.1.2)$$

Nyní definujeme operátor vektorové derivace  $\nabla$  jako objekt, který má algebraické vlastnosti vektoru a jeho vnitřní součin s jiným vektorem dává směrovou derivaci

$$a \cdot \nabla F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon a) - F(x)}{\varepsilon}. \quad (2.1.3)$$

Mějme nějakou konstantní bázi  $\{e_k\}$  s reciprokou bází  $\{e^k\}$ . Jelikož  $\nabla$  je vektor, potom ho můžeme napsat jako lineární kombinaci vektorů báze

$$\nabla = e^k e_k \cdot \nabla = e^k \frac{\partial}{\partial x^k} = e^k \partial_k, \quad (2.1.4)$$

kde jsme tradičně označili derivace v souřadnicových směrech jako  $\frac{\partial}{\partial x^k} = \partial_k$ . Ze souřadnicového vyjádření je vidět, jakým způsobem operátor vektorové derivace kombinuje algebraické vlastnosti vektoru s diferenciálními vlastnostmi směrové derivace. Za pomoci (2.1.4) lze přímočaře získat vztahy pro derivaci součtu a součinu

$$\nabla(F + G) = \nabla F + \nabla G, \quad (2.1.5)$$

$$\nabla(FG) = \dot{\nabla} F G + \dot{\nabla} F \dot{G}. \quad (2.1.6)$$

Tečka značí, která funkce má být ve výrazu derivována. Pro první výraz bychom mohli použít závorek a psát  $\dot{\nabla} F G = (\nabla F)G$ , avšak pro druhý závorky použít nemůžeme, neboť geometrický součin není obecně komutativní. Označíme-li  $\nabla_y$  vektorovou derivaci působící na funkce proměnné  $y$ , můžeme výraz  $\dot{\nabla} F \dot{G}$  zapsat jako

$$\dot{\nabla} F \dot{G} = \nabla_y(F(x)G(y))|_{y=x} = e^k F \partial_k G, \quad (2.1.7)$$

tedy členy bez tečky považujeme za konstantní vůči derivaci. Pokud se ve výrazu nevyskytuje tečka nad  $\nabla$ , působí derivace na první člen napravo od  $\nabla$ . S touto konvencí pak můžeme zapsat jinou podobu Leibnizova pravidla pro součin

$$\dot{F} \dot{\nabla} \dot{G} = \dot{F} \dot{\nabla} G + F \nabla G \quad (2.1.8)$$

Když  $\nabla$  je vektor, pak by nás zajímalo čemu je rovna jeho druhá mocnina. Algebraicky by to měl být skalár. Začneme s několika pozorováními. Zaprvé jelikož  $\nabla$  je vektor, můžeme součin  $\nabla F$  psát také jako

$$\nabla F = \nabla \cdot F + \nabla \wedge F. \quad (2.1.9)$$

Dále vnější součin  $\nabla$  s  $\nabla$  dává

$$\nabla \wedge \nabla = e^k \partial_k \wedge e^j \partial_j = (e^k \wedge e^j) \partial_k \partial_j = 0, \quad (2.1.10)$$

neboť parciální derivace jsou, jak předpokládáme, záměnné a vektory báze  $e^k$  konstantní. Dostáváme tedy

$$\nabla^2 F = (\nabla \cdot \nabla) F. \quad (2.1.11)$$

Zvolíme-li nyní konstantní ortonormální bázi  $\{e_k\}$ , pak je sama sobě reciprokou, tj. platí  $e_k = e^k$ , potom pro  $\nabla^2$  získáváme

$$\nabla^2 F = (\nabla \cdot \nabla) F = e_k \cdot e_j \partial_k \partial_j F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \Delta F, \quad (2.1.12)$$

což není nic jiného než Laplaceův operátor a tedy

$$\nabla^2 = \Delta. \quad (2.1.13)$$

### 2.1.1 Gradient, divergence a rotace

Naše volba značení a výsledek  $\nabla^2 = \Delta$  není náhodou. Operátor vektorové derivace úzce souvisí s diferenciálními operátory gradientu, divergence a rotace. V této části budeme značit vektory v  $\mathbb{R}^3$  tučně včetně operátoru vektorové derivace. Uvažujme nyní skalární pole  $\varphi$ . Aplikujeme-li  $\nabla$  na  $\varphi$ , dostáváme z rovnice (2.1.9)

$$\nabla\varphi = \nabla \wedge \varphi = e^k \partial_k \varphi. \quad (2.1.14)$$

Vektorová derivace dává gradient skalárních polí. Budeme-li nyní uvažovat zatím v obecné dimenzi vektorové pole  $f(x)$ , můžeme podle (2.1.9) rozdělit  $\nabla f$  na symetrickou a antisymetrickou část. Symetrickou část budeme nazývat divergence a je rovna

$$\nabla \cdot f = \partial_k (e^k \cdot f) = \partial_k f^k, \quad (2.1.15)$$

což splývá s definicí divergence na  $\mathbb{R}^3$ . Dále nám zbývá antisymetrická část součinu, kterou budeme nazývat vnější derivace. V souřadnicích lze vyjádřit jako

$$\nabla \wedge f = e^k \wedge e^j \partial_k f_j. \quad (2.1.16)$$

Vezmeme-li v  $\mathbb{R}^3$  standardní bázi, pak pro složky vnější derivace můžeme psát

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_j \partial_k f_j = \varepsilon_{kji} B_i \partial_k f_j. \quad (2.1.17)$$

Z toho je vidět, že vnější derivace má stejné složky jako operátor rotace, avšak rotaci v  $\mathbb{R}^3$  chápeme jako vektor, kdežto vnější derivace vektorového pole je bivektor, proto je obtížné definovat rotaci nad rámcem  $\mathbb{R}^3$ , neboť pouze v  $\mathbb{R}^3$  lze ztotožňovat vektory a bivektory. Obecně se rotace definuje na úrovni diferenciálních forem. Rotací se pak rozumí 2-forma, která je vnější derivací 1-formy.

Souvislost mezi vektorovou derivací a diferenciálními operátory na  $\mathbb{R}^3$  můžeme shrnout v následujícím přehledu, kde  $\varphi$  je skalární pole a  $\mathbf{f}$  je vektorové pole

$$\nabla\varphi = \text{grad } \varphi, \quad (2.1.18)$$

$$\nabla\mathbf{f} = \text{div } \mathbf{f} + I \text{ rot } \mathbf{f}. \quad (2.1.19)$$

S využitím geometrického součinu a operátoru vektorové derivace se zjednoduší i odvozování diferenciálních identit

$$\begin{aligned} \text{div}(\varphi \mathbf{f}) &= \nabla \cdot (\varphi \mathbf{f}) = \partial_k (\varphi \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{f}) \\ &= (\partial_k \varphi) f_k + \varphi \partial_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{f}) \\ &= (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{f} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{f} \\ &= (\text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{f} + \varphi \text{div } \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Nebo pro Laplaceův operátor působící na vektorová pole dostaneme

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{f} &= \nabla^2 \mathbf{f} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \wedge \mathbf{f}) \\
&= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) + \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) + \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{f} \\
&= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f} I^2) \\
&= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f} I) I \\
&= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) - I \nabla \wedge (I \nabla \wedge \mathbf{f}) \\
&= \text{grad div } \mathbf{f} - \text{rot rot } \mathbf{f},
\end{aligned}$$

kde jsme využili (1.3.47) a toho, že v trojrozměrném prostoru pseudoskalár  $I$  komutuje se všemi multivektory.

## 2.2 Orientovaný integrál

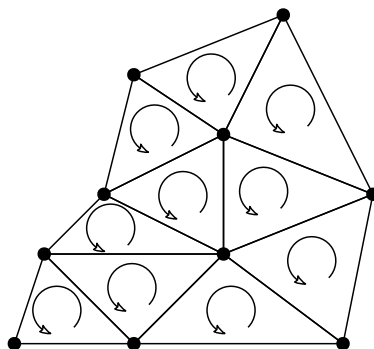
Cílem v této části bude intuitivně zavést integrál multivektorových funkcí přes  $d$ -dimenzionální varietu  $\mathcal{M}$  vnořenou do  $\mathbb{R}^N$ . Navíc budeme požadovat, aby tato varietu byla orientovatelná. To nám umožňuje dobře definovat funkci jednotkového pseudoskaláru  $I_{\mathcal{M}}(x)$ , která určuje tečný prostor a orientaci variety. Více o pseudoskaláru  $I_{\mathcal{M}}(x)$  a jeho konstrukci rozebíráme na začátku kapitoly 4. Integrál funkce  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}_N$  přes  $\mathcal{M}$  definujeme pomocí Riemannovy sumy jako

$$\int_{\mathcal{M}} dX F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta X(x_k) F(x_k), \quad (2.2.1)$$

kde body  $x_k$  jsou body nějakého dělení  $\mathcal{M}$  a  $\Delta X(x_k)$  jsou příslušné orientované objemy. Integrál tedy získáme jako limitu více a více jemnějších dělení. Pro případ  $d = 1$  dostáváme orientovaný křivkový integrál, kde konstrukce orientovaných objemů přechází v orientované úsečky, tedy vektory spojující vždy dva sousední body dělení. Pokusíme se ilustrovat konstrukci Riemannovy sumy pro případ  $d = 2$ , který bude sloužit k zobecnění na obecné  $d$ .

Na dvourozměrném povrchu vybereme množinu bodů, která bude představovat naše dělení. Každé tři sousední body pak definují trojúhelník, neboli dvourozměrný simplex. Tyto trojúhelníky nám s jistou přesností aproximují naši dvourozměrnou varietu  $\mathcal{M}$ . Je jasné, že pokud zvolíme více bodů a tím pádem více trojúhelníků, pak naše aproximace bude přesnější a v limitě získáme varietu  $\mathcal{M}$ . Trojúhelníky mají orientaci danou pořadím procházení jejich vrcholů a jejich orientaci volíme tak, aby pro každé dva sousední trojúhelníky byla jejich sousední hrana procházena v opačném směru, viz obr. 2.1. Mějme nyní body  $x_0, x_1, x_2$  sousední body dělení a definujme vektory

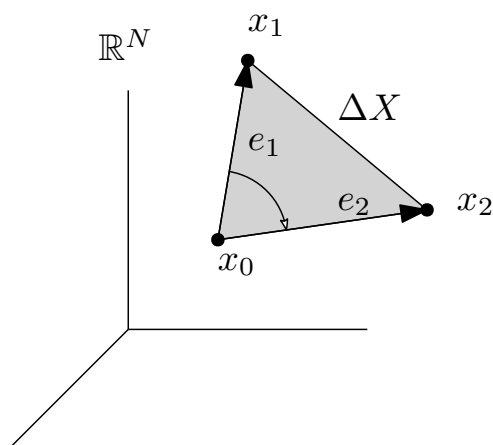
$$e_1 = x_1 - x_0 \quad e_2 = x_2 - x_0. \quad (2.2.2)$$



Obrázek 2.1: Triangulace dvourozměrného povrchu s vhodnou volbou orientace jednotlivých simplexů.

Orientovanou plochu  $\Delta X$ , pak definujeme jako

$$\Delta X = \frac{1}{2}e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{2}(x_1 \wedge x_2 + x_2 \wedge x_0 + x_0 \wedge x_1). \quad (2.2.3)$$



Obrázek 2.2: Bivektor  $\Delta X$  reprezentuje jeden ze simplexů triangulace nějaké dvourozměrné variety.

Takto definovaný bivektor  $\Delta X$  má orientaci odpovídající  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_0$  a velikost rovnu obsahu trojúhelníku s vrcholy  $x_0, x_1, x_2$ , viz obr. 2.2. Označíme-li  $\bar{F}$  průměr integrované funkce přes vrcholy trojúhelníku, pak můžeme psát

$$\int_{\mathcal{M}} dXF = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta X^k \bar{F}^k, \quad (2.2.4)$$

kde suma prochází všechny trojúhelníky. Úplně stejnou konstrukcí můžeme dostat i integrály

$$\int_{\mathcal{M}} F dX = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \bar{F}^k \Delta X^k, \quad (2.2.5)$$

$$\int_{\mathcal{M}} F dXG = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \bar{F}^k \Delta X^k \bar{G}^k. \quad (2.2.6)$$

Pro obecně  $d$ -dimenzionální povrch provedeme jeho tzv. triangulaci za pomoci simplexů, které opět budou splňovat, že jejich orientace je taková, že stěny sousedních simplexů mají opačnou orientaci. Pro dostatečně jemná dělení variety  $\mathcal{M}$  můžeme orientovaný element objemu  $\Delta X$  nahradit pseudoskalárem variety  $I_{\mathcal{M}}(x)$  jako

$$\Delta X(x) = |\Delta X(x)| I_{\mathcal{M}}(x), \quad (2.2.7)$$

kde  $|\Delta X(x)|$  představuje velikost objemového elementu. Stejně můžeme zapsat i orientovanou míru  $dX(x)$  jako

$$dX(x) = |dX| I_{\mathcal{M}}(x), \quad (2.2.8)$$

kde  $|dX|$  je klasická skalární míra na  $\mathcal{M}$ .

## 2.2.1 Vektorová derivace jako integrál

Nyní budeme uvažovat konkrétně  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^N$ , potom můžeme operátor vektorové derivace definovat pomocí limity

$$\nabla F(x_0) = \lim_{|\mathcal{U}(x_0)| \rightarrow 0} \frac{I^{-1}(x_0)}{|\mathcal{U}(x_0)|} \oint_{\partial \mathcal{U}} dSF, \quad (2.2.9)$$

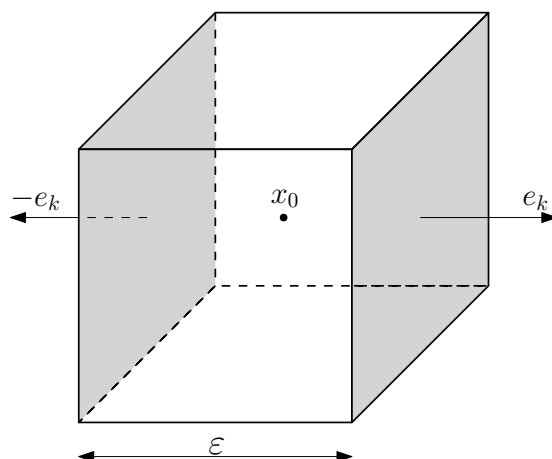
kde  $\mathcal{U}$  představuje omezené otevřené okolí bodu  $x_0$  a integrál se počítá přes jeho hranici  $\partial \mathcal{U}$ .  $(N-1)$ -vektor  $dS$  má takovou orientaci, že  $dSn = I|dS|$ , kde  $n$  je normála směřující ven a  $n^2 = 1$ . Navíc na  $\mathbb{R}^N$  je funkce pseudoskaláru konstantní, a tak můžeme integrál přepsat jako

$$\nabla F(x_0) = \lim_{|\mathcal{U}(x_0)| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathcal{U}(x_0)|} \oint_{\partial \mathcal{U}} nF |dS|. \quad (2.2.10)$$

Ukážeme, že tato definice je ekvivalentní definici (2.1.4). Na  $\mathbb{R}^N$  zvolíme standardní ortonormální bázi  $\{e_k\}$  a předpokládáme, že limita v (2.2.10) existuje. Za okolí  $\mathcal{U}$  zvolíme krychli se středem v bode  $x_0$  s délkou hrany  $\varepsilon$ . Hranici  $\partial \mathcal{U}$  můžeme rozdělit na  $N$  dvojic protilehlých stěn  $\mathcal{U}_k$ , integrál (2.2.10) pak rozepíšeme jako

$$\oint_{\partial \mathcal{U}} nF |dS| = \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{U}_k} nF |dS|. \quad (2.2.11)$$





Obrázek 2.3: Krychlové okolí  $\mathcal{U}$ , kde šedě je znázorněna část hranice  $\mathcal{U}_k$  společně s normálovými vektory.

Stěny tvořící dvojici  $\mathcal{U}_k$  mají normálu  $e_k$  respektive  $-e_k$  viz obr. (2.3). Stěnu s normálou  $e_k$  označíme  $\mathcal{U}_k^+$  a stěnu s normálou  $-e_k$  jako  $\mathcal{U}_k^-$ , integrál přes dvojici stěn  $\mathcal{U}_k$  pak můžeme přepsat

$$\int_{\mathcal{U}_k} nF|dS| = e_k \left( \int_{\mathcal{U}_k^+} F|dS| - \int_{\mathcal{U}_k^-} F|dS| \right) \quad (2.2.12)$$

Funkci  $F$  na každé stěně rozvedeme do nultého řádu, protože vyšší řády ve finální limitě vymizí.

$$\int_{\mathcal{U}_k} nF|dS| = e_k \left( F(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}e_k) - F(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}e_k) \right) \varepsilon^{N-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^N) \quad (2.2.13)$$

Dosadíme-li tento výsledek společně s (2.2.11) do původní limity (2.2.10), dostaneme

$$\nabla F(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^{N-1} e_k \left( F(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}e_k) - F(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}e_k) \right) = \sum_{k=1}^N e_k \frac{\partial F}{\partial x^k}. \quad (2.2.14)$$

Integrální vyjádření derivace hraje zásadní roli při odvození Základní věty integrálního počtu.

## 2.3 Základní věta integrálního počtu

**Věta** (Základní věta integrálního počtu). *Bud'  $\mathcal{M}$   $N$ -dimenzionální podmnožina  $\mathbb{R}^N$  s po částech hladkou hranicí  $\partial\mathcal{M}$  a  $F$  funkce s hodnotami v geometrické algebře.*

Potom platí

$$\int_{\mathcal{M}} dX \nabla F = \int_{\partial \mathcal{M}} dSF, \quad (2.3.1)$$

kde  $dX$ , resp.  $dS$  je orientovaná míra  $\mathcal{M}$ , resp.  $\partial \mathcal{M}$ .

Větu bychom mohli též formulovat pro obecné variety  $\mathcal{M}$ , avšak pro její důkaz bychom potřeboval mnohem větší aparát geometrické analýzy, než jaký jsme zde doposud představili. Věta může být formulována díky nekomutativitě geometrického součinu i jinak

$$\int_{\mathcal{M}} \dot{G} dX \dot{\nabla} \dot{F} = \int_{\partial \mathcal{M}} G dSF. \quad (2.3.2)$$

Nyní se pokusíme naznačit strukturu důkazu pro tuto větu ve znění (2.3.1). Integrál nalevo můžeme rozepsat z definice do Riemannovy sumy

$$\int_{\mathcal{M}} dX \nabla F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta X(x_i) \nabla F(x_i). \quad (2.3.3)$$

Využijeme vzorce (2.2.9), s tím, že limitní přechod  $n \rightarrow \infty$  už v sobě obsahuje limitní přechod  $|\Delta X(x_i)| \rightarrow 0$ . Označíme  $\mathcal{M}_i$  podmnožiny  $\mathcal{M}$  odpovídající příslušným  $\Delta X(x_i)$ . Integrály přes společnou hranici dvou sousedních podmnožin se odečtou, protože mají opačnou orientaci

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta X(x_i) \nabla F(x_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\Delta X(x_i)| I(x_i) \frac{I^{-1}(x_i)}{|\Delta X(x_i)|} \int_{\partial \mathcal{M}_i} dSF \\ &= \int_{\partial \mathcal{M}} dSF. \end{aligned}$$

## 2.4 Monogenické funkce a Cauchyho integrální vzorec

Mějme  $\mathcal{M}$  oblast v  $\mathbb{R}^N$  s hranicí  $\partial \mathcal{M}$ , dále předpokládejme, že máme funkci  $g(x, x')$ , která je řešením rovnice

$$\nabla g(x, x') = -\dot{g}(x, x') \dot{\nabla}' = \delta(x - x'), \quad (2.4.1)$$

kde  $\nabla = \nabla_x$ ,  $\nabla' = \nabla_{x'}$  a  $\delta(x - x')$  je Diracova  $\delta$ -funkce, která na testovací funkci působí

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta(x - x') |dX(x')| F(x') = F(x). \quad (2.4.2)$$

Využijeme Základní věty integrálního počtu a toho, že pseudoskalár  $I$  je na  $\mathbb{R}^N$  konstantní, abychom odvodili

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\mathcal{M}} g(x, x') dS(x') F(x') \\
&= \int_{\mathcal{M}} g(x, x') dX(x') \nabla' F(x') + (-1)^{N-1} \int_{\mathcal{M}} \dot{g}(x, x') \dot{\nabla}' dX(x') F(x') \\
&= \int_{\mathcal{M}} g(x, x') dX(x') \nabla' F(x') - (-1)^{N-1} I \int_{\mathcal{M}} \delta(x - x') |dX(x')| F(x') \\
&= \int_{\mathcal{M}} g(x, x') dX(x') \nabla' F(x') - (-1)^{N-1} I F(x). \tag{2.4.3}
\end{aligned}$$

Jedním z možných řešení rovnice (2.4.1) je funkce

$$g(x, x') = \frac{1}{\odot_N} \frac{x - x'}{|x - x'|^N}, \tag{2.4.4}$$

kde  $\odot_N$  je povrch jednotkové koule v  $\mathbb{R}^N$ , který za pomoci  $\Gamma$ -funkce můžeme vyjádřit jako

$$\odot_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}. \tag{2.4.5}$$

Rigorózní důkaz, že se skutečně jedná o Greenovu funkci operátoru  $\nabla$ , je velmi technický a dlouhý, proto ho zde uvádět nebudeme. Že by se mělo jednat o Greenovu funkci, lze nahlédnout z následujících pozorování

$$\nabla g(x, x') = 0, \quad \forall x \neq x' \tag{2.4.6}$$

a že integrál z  $\nabla g(x, x')$  je roven jedné

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} \nabla g(x, x') dX(x) &= \int_{B(x', \varepsilon)} \nabla g(x, x') dX(x) \\
&= \int_{\partial B(x', \varepsilon)} \frac{1}{\odot_N} \frac{x - x'}{|x - x'|^N} dS(x) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{N-1} \odot_N} \int_{\partial B(x', \varepsilon)} |dS| = 1,
\end{aligned}$$

kde  $B(x', \varepsilon)$  je koule se středem v bodě  $x'$  a poloměrem  $\varepsilon$ . Dosadíme-li za  $g(x, x')$  podle (2.4.4) do vztahu (2.4.3), získáme zobecnění Cauchyho integrálního vzorce z komplexní analýzy

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\odot_N} \int_{\mathcal{M}} |dX(x')| \frac{x - x'}{|x - x'|^N} \nabla' f(x') \\
&\quad - \frac{1}{\odot_N} \int_{\partial\mathcal{M}} |dS(x')| \frac{x - x'}{|x - x'|^N} n(x') f(x'). \tag{2.4.7}
\end{aligned}$$

Uvažujme nyní na chvíli případ  $N = 2$ , z podkapitoly (1.1) víme, že komplexní čísla jsou v geometrické algebře obsažena a nyní bychom chtěli v rámci geometrické analýzy obsáhnout pojem holomorfní funkce. Připomeňme, že komplexní čísla můžeme v rámci geometrické algebry chápat

$$Z = x + Iy, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.4.8)$$

Dále funkci komplexní proměnné  $f(Z)$  můžeme v geometrické algebře reprezentovat

$$f(Z) = f(x + Iy) = u(x, y) + Iv(x, y), \quad u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.4.9)$$

A ve standardních souřadnicích můžeme operátor vektorové derivace zapsat také jako

$$\nabla = e_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.4.10)$$

Aplikujeme-li nyní vektorovou derivaci na naši komplexní funkci  $f(Z)$ , pak výsledek můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \nabla f &= e_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + I \frac{\partial v}{\partial x} + I \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) e_1 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) e_2. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Pokud je funkce  $f$  holomorfní, pak platí Cauchy-Riemannovy podmínky a rovnice (2.4.11) přechází do tvaru

$$\nabla f = 0. \quad (2.4.12)$$

V geometrické analýze budeme funkce vyhovující této rovnici nazývat monogenické funkce a můžeme je chápat jako zobecnění holomorfních funkcí. Pokud se nyní vrátíme ke vzorci (2.4.7), pro monogenické funkce získáváme tvar

$$f(x) = \frac{(-1)^N}{\odot_N I} \int_{\partial \mathcal{M}} \frac{(x - x')}{|x - x'|^N} dS(x') f(x'). \quad (2.4.13)$$

Pro případ  $N = 2$  můžeme uvažovat nějakou omezenou podoblast  $\mathbb{R}^2$ , která má za hranici uzavřenou, regulární křivku  $\gamma$ , potom pro body  $x$  uvnitř platí

$$f(x) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\gamma} \frac{x - x'}{(x - x')^2} dx' f(x') = \frac{1}{2\pi I} \int_{\gamma} \frac{1}{x - x'} dx' f(x'). \quad (2.4.14)$$

Odtud ke komplexní proměnné můžeme jednoduše přejít tak, že  $Z' = e_1 x'$ . Potom  $dZ' = e_1 dx'$  a pseudoskaláru  $I$  odpovídá imaginární jednotka  $-i$ . Vzorci (2.4.14) tedy odpovídá

$$f(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(Z')}{Z' - Z} dZ'. \quad (2.4.15)$$



# Kapitola 3

## Mechanika tuhého tělesa za pomoci geometrické algebry

V této kapitole se pokusíme aplikovat metody geometrické algebry při řešení úlohy z newtonovské mechaniky. Zejména nahradíme vektorové součiny bivektory a pro rotace využijeme rotory. V této kapitole také budeme psát vektory tučně a ostatní objekty běžným fontem.

### 3.1 Moment hybnosti

Moment hybnosti je tradičně definován jako vektorový součin vektoru polohy a hybnosti. Jak jsme demonstrovali v části 1.3, vektorový součin je pouze dualizovaný bivektor. Moment hybnosti jedné (nerelativistické) částice definujeme jako bivektor

$$L = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}. \quad (3.1.1)$$

Pokud zderivujeme  $L$ , měli bychom dostat moment síly

$$\frac{dL}{dt} = m\dot{\mathbf{x}} \wedge \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}, \quad (3.1.2)$$

kde  $\mathbf{F}$  je z druhého Newtonova zákona síla působící na částici. Tedy moment síly bude též bivektor definovaný jako

$$N = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}, \quad (3.1.3)$$

$$\frac{dL}{dt} = N, \quad (3.1.4)$$

tedy časová změna momentu hybnosti je dána momentem vnějších sil. Zavedeme-li  $\hat{\mathbf{x}}$  jako jednotkový vektor ve směru  $\mathbf{x}$  a označíme-li  $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2}$ , dostaneme vyjádření

$$L = mr\hat{\mathbf{x}} \wedge (\dot{r}\hat{\mathbf{x}} + r\dot{\hat{\mathbf{x}}}) = mr^2\hat{\mathbf{x}} \wedge \dot{\hat{\mathbf{x}}}. \quad (3.1.5)$$

Z normalizační podmínky  $\hat{\mathbf{x}}^2 = 1$  dostaneme zderivováním, že  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}} = 0$ , a můžeme psát

$$L = mr^2 \dot{\hat{\mathbf{x}}} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = -mr^2 \hat{\mathbf{x}} \ddot{\hat{\mathbf{x}}}. \quad (3.1.6)$$

## 3.2 Rotující souřadné systémy

Mějme ortonormální bázi  $\{\mathbf{f}_k\}$ , která se v závislosti na čase otáčí v prostoru. Můžeme ji vztáhnout k nějaké pevné ortonormální bázi  $\{\mathbf{e}_k\}$  pomocí rotoru  $R(t)$  závislého na čase

$$\mathbf{f}_k(t) = R(t) \mathbf{e}_k \tilde{R}(t). \quad (3.2.1)$$

Naším cílem je získat objekt, který bude představovat úhlovou rychlost. Klasicky se vektor úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}$  zavádí pomocí vektorového součinu jako

$$\dot{\mathbf{f}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}_k. \quad (3.2.2)$$

Podle vztahu (1.3.42), pak můžeme nahradit vektorový součin

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}_k &= -I(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{f}_k) = -\frac{1}{2}(I\boldsymbol{\omega}\mathbf{f}_k - I\mathbf{f}_k\boldsymbol{\omega}) \\ &= -\frac{1}{2}(I\boldsymbol{\omega}\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_k I\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{f}_k \cdot (I\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Zavedeme-li bivektor úhlové rychlosti  $\Omega$  jako

$$\Omega = I\boldsymbol{\omega}, \quad (3.2.4)$$

můžeme pak psát

$$\dot{\mathbf{f}}_k = \mathbf{f}_k \cdot \Omega. \quad (3.2.5)$$

Zderivujeme-li rovnici (3.2.1) dostaneme

$$\dot{\mathbf{f}}_k = \dot{R} \mathbf{e}_k \tilde{R} + R \mathbf{e}_k \dot{\tilde{R}} = \dot{R} \tilde{R} R \mathbf{e}_k \tilde{R} + R \mathbf{e}_k \tilde{R} \dot{R} = \dot{R} \tilde{R} \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k R \dot{\tilde{R}}. \quad (3.2.6)$$

Připomeňme, že  $R$  coby rotor splňuje normalizační podmínku  $R\tilde{R} = 1$ . Její derivací dostaneme

$$\dot{R}\tilde{R} + R\dot{\tilde{R}} = 0 \quad (3.2.7)$$

a navíc platí

$$\widetilde{\dot{R}\tilde{R}} = R\dot{\tilde{R}} = -\dot{R}\tilde{R},$$

z čehož můžeme usoudit, že  $\dot{R}\tilde{R}$  je kombinací bladů sudého stupně. V algebře třírozměrného prostoru mezi ně patří pouze bivektorové blady, a proto se musí jednat o bivektor. Z (3.2.6) dostáváme

$$\dot{\mathbf{f}}_k = (2\dot{R}\tilde{R}) \cdot \mathbf{f}_k. \quad (3.2.8)$$



Nakonec dostaneme vztah mezi bivektorem úhlové rychlosti a rotorem

$$2\dot{R}\tilde{R} = -\Omega, \quad (3.2.9)$$

který můžeme upravit do podoby diferenciální rovnice pro rotor  $R$

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}\Omega R. \quad (3.2.10)$$

Dále budeme užívat Einsteinovu sumační konvenci, kdy se přes opakující indexy sčítá v celém rozsahu indexů. Klasicky je rotující soustava  $\{\mathbf{f}_k\}$  svázána s inerciální soustavou  $\{\mathbf{e}_k\}$  maticí rotace  $\mathbb{S}$  a rovnice (3.2.1) má podobu

$$\mathbf{f}_k = \mathbb{S}_{kj}\mathbf{e}_j, \quad (3.2.11)$$

kde matice  $\mathbb{S}$  je ortogonální s determinanem rovným jedné. Prvky matice jsou podle definice souřadnice nových bazických vektorů v bázi původní

$$\mathbb{S}_{kj} = \mathbf{e}_j \cdot \left( R\mathbf{e}_k\tilde{R} \right). \quad (3.2.12)$$

Matice úhlové rychlosti  $\omega_{jk}$  se definuje z matice  $\mathbb{S}$  jako

$$\omega_{jk} = -\left( \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T \right)_{jk}. \quad (3.2.13)$$

Matice  $\omega_{jk}$  je antisymetrická a její nezávislé složky jsou stejné jako složky bivektoru úhlové rychlosti  $\Omega$  v rotující bázi

$$\dot{\mathbf{f}}_k = \omega_{kj}\mathbf{f}_j = \Omega \cdot \mathbf{f}_k = \left( (\Omega \cdot \mathbf{f}_k) \cdot \mathbf{f}_j \right) \mathbf{f}_j = \left( \Omega \cdot (\mathbf{f}_k \wedge \mathbf{f}_j) \right) \mathbf{f}_j, \quad (3.2.14)$$

$$\omega_{kj} = \Omega \cdot (\mathbf{f}_k \wedge \mathbf{f}_j). \quad (3.2.15)$$

### 3.3 Tuhé těleso a moment setrvačnosti

Pohyb tuhého tělesa můžeme rozložit pohyb tuhého tělesa na translační pohyb těžiště a rotační pohyb v souřadném systému s počátkem v těžišti. Poloha  $\alpha$ -tého bodu  $\mathbf{y}_\alpha$  v čase  $t$  bude vypadat

$$\mathbf{y}_\alpha(t) = R(t)\mathbf{x}_\alpha\tilde{R}(t) + \mathbf{X}(t), \quad (3.3.1)$$

kde vektor  $\mathbf{X}$  je polohový vektor těžiště a vektory  $\mathbf{x}_\alpha$  jsou polohy bodů tělesa v těžišťové soustavě v nějakém referenčním čase  $t_0$ . Rychlost konkrétního bodu  $\mathbf{y}_\alpha$  tuhého tělesa je rovna

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha(t) &= \dot{R}\mathbf{x}_\alpha\tilde{R} + R\mathbf{x}_\alpha\dot{\tilde{R}} + \dot{\mathbf{X}} \\ &= -\frac{1}{2}\Omega R\mathbf{x}_\alpha\tilde{R} + \frac{1}{2}R\mathbf{x}_\alpha\tilde{R}\Omega + \mathbf{V} \\ &= (R\mathbf{x}_\alpha\tilde{R}) \cdot \Omega + \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Označíme  $\Omega_B$  bivektor úhlové rychlosti  $\Omega$  přenesený do stacionární referenční kopie tuhého tělesa

$$\Omega_B = \tilde{R}\Omega R. \quad (3.3.2)$$

Vztah pro rychlost nějakého bodu tělesa, pak alternativně můžeme psát jako

$$\mathbf{v}_\alpha(t) = R(t) (\mathbf{x}_\alpha \cdot \Omega_B(t)) \tilde{R}(t) + \mathbf{V}(t). \quad (3.3.3)$$

Dosadíme-li z definice  $\Omega_B$  do rovnice (3.2.10) pro rotor  $R$ , získáme pohybovou rovnici pro  $R$  v řeči  $\Omega_B$

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}R\Omega_B. \quad (3.3.4)$$

Přejdeme nyní od bodových hmotností k funkci hustoty  $\rho(\mathbf{x})$ , která může být i součtem  $\delta$ -funkcí pro diskrétně rozložené hmotné body. Celková hmotnost tělesa je dána integrálem

$$M = \int d^3x \rho(\mathbf{x}). \quad (3.3.5)$$

Celkovou hybnost tuhého tělesa dostaneme jako

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int d^3x \rho \mathbf{v} = \int d^3x \rho \left( R(\mathbf{x} \cdot \Omega_B) \tilde{R} + \mathbf{V} \right) \\ &= R \left( \left( \int d^3x \rho \mathbf{x} \right) \cdot \Omega_B \right) \tilde{R} + \int d^3x \rho \mathbf{V} = M\mathbf{V}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Obdobně celkový moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k těžišti pak bude roven

$$\begin{aligned} L &= \int d^3x (\mathbf{y} - \mathbf{X}) \wedge \rho \mathbf{v} = \int d^3x \rho R \mathbf{x} \tilde{R} \wedge ((R \mathbf{x} \tilde{R}) \cdot \Omega + \mathbf{V}) \\ &= \int d^3x \rho \left[ R(\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot \Omega_B)) \tilde{R} + \mathbf{X} \wedge R(\mathbf{x} \cdot \Omega_B) \tilde{R} + R \mathbf{x} \tilde{R} \wedge \mathbf{V} \right] \\ &= R \left( \int d^3x \rho \mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot \Omega_B) \right) \tilde{R}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Integrál v závorce se kompletně vztahuje k naší stacionární kopii, a tak pomocí něj můžeme definovat lineární zobrazení  $\mathcal{I}$  nezávislé na čase, které bude zobrazovat bivektory na bivektory a nazveme ho moment setrvačnosti

$$\mathcal{I}(B) = \int d^3x \rho \mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B). \quad (3.3.8)$$

Takto dostáváme vztah pro moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k těžišti ve tvaru

$$L = R\mathcal{I}(\Omega_B)\tilde{R}. \quad (3.3.9)$$

Zobrazení  $\mathcal{I}$  vyjadřuje moment setrvačnosti vzhledem k těžišti, ale ne všechna tělesa musí rotovat okolo těžiště. Mějme nějaký vektor  $\mathbf{a}$  spojující těžiště a nějaký jiný bod, pak moment setrvačnosti vzhledem k bodu posunutému o  $\mathbf{a}$  vůči těžišti bude

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathbf{a}}(B) &= \int d^3x \rho (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot B) \\
&= \int d^3x \rho (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B) - \mathbf{x} \wedge (\mathbf{a} \cdot B) - \mathbf{a} \wedge (\mathbf{x} \cdot B) + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \cdot B)) \\
&= \mathcal{I}(B) - \left( \int d^3x \rho \mathbf{x} \right) \wedge (\mathbf{a} \cdot B) - \mathbf{a} \wedge \left( \left( \int d^3x \rho \mathbf{x} \right) \cdot B \right) + M \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \cdot B) \\
&= \mathcal{I}(B) + M \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \cdot B), \tag{3.3.10}
\end{aligned}$$

což není nic jiného než tvrzení Steinerovy věty v jazyce geometrické algebry.

### 3.4 Hlavní momenty a hlavní roviny

Moment setrvačnosti působí jako lineární operátor na podprostoru bivektorů a můžeme zkoumat jeho spektrální vlastnosti. Bázi tohoto podprostoru si zvolíme stejně jako v kapitole 1.2, složky momentu setrvačnosti definujeme jako

$$\mathcal{I}_{ij} = -B_i \cdot \mathcal{I}(B_j), \tag{3.4.1}$$

$$\mathcal{I}(B_i) = \mathcal{I}_{ij} B_j. \tag{3.4.2}$$

Pro následující výpočet budeme potřebovat vztah pro dva bivektory  $A, B$  a vektor  $\mathbf{x}$

$$A \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B)) = B \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot A)), \tag{3.4.3}$$

$$((\mathbf{x} \cdot B) \wedge \mathbf{x}) \cdot A = (\mathbf{x} \cdot B) \cdot (\mathbf{x} \cdot A) = (\mathbf{x} \cdot A) \cdot (\mathbf{x} \cdot B) = ((\mathbf{x} \cdot A) \wedge \mathbf{x}) \cdot B.$$

Tento výsledek navíc nezávisí na dimenzi. Nyní můžeme ukázat, že složky momentu setrvačnosti  $\mathcal{I}_{ij}$  jsou symetrické v indexech  $i$  a  $j$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{ij} &= - \int d^3x \rho B_i \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B_j)) \\
&= - \int d^3x \rho B_j \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B_i)) = \mathcal{I}_{ji} \tag{3.4.4}
\end{aligned}$$

Složky  $\mathcal{I}_{ij}$  tvoří symetrickou a lze navíc ukázat, že i pozitivně-semidefinitní matici. Ze spektrální teorie pro matice, pak plyne, že ji lze diagonalizovat a vlastní čísla budou nezáporná. Vlastní čísla označíme jako  $i_1, i_2, i_3$  a zvolíme bázi tak, aby bazické

bivektory  $B_1, B_2, B_3$  byly vlastní bivektory zobrazení  $\mathcal{I}$ . V  $\mathbb{R}^3$  k těmto bivektorům skrze dualitu (1.2.5) existují jednoznačně vektory báze, které klasicky chápeme jako hlavní osy pro moment setrvačnosti a pokud těleso má nějaké symetrie, pak se tyto osy shodují s osami symetrie.

### 3.5 Pohybové rovnice

Aktuální stav pohybujícího se tuhého tělesa můžeme úplně popsat polohovým vektorem těžiště  $\mathbf{X}$  a rotorem natočení  $R$  vůči nějaké referenční kopii tělesa. Pohyb těžiště se řídí druhým Newtonovým pohybovým zákonem

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}, \quad (3.5.1)$$

kde  $\mathbf{F}$  je celková síla působící na těleso. Pro rotor máme dvě rovnice

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}R\Omega_B, \quad (3.5.2)$$

$$\dot{L} = N, \quad (3.5.3)$$

kde  $N$  je celkový moment sil působící na těleso. Do druhé rovnice dosadíme vztah pro moment hybnosti vzhledem k těžišti

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \dot{R}\mathcal{I}(\Omega_B)\tilde{R} + R\dot{\mathcal{I}}(\Omega_B)\tilde{R} + R\mathcal{I}(\dot{\Omega}_B)\tilde{R} \\ &= R\left(\mathcal{I}(\dot{\Omega}_B) + \tilde{R}\dot{R}\mathcal{I}(\Omega_B) + \mathcal{I}(\Omega_B)\dot{R}R\right)\tilde{R} \\ &= R\left(\mathcal{I}(\dot{\Omega}_B) - \frac{1}{2}\Omega_B\mathcal{I}(\Omega_B) + \frac{1}{2}\mathcal{I}(\Omega_B)\Omega_B\right)\tilde{R} \\ &= R\left(\mathcal{I}(\dot{\Omega}_B) - \Omega_B \times \mathcal{I}(\Omega_B)\right)\tilde{R}, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

kde  $\times$  je komutátor multivektorů. Zvolme bázi  $\{\mathbf{e}_k\}$  tak, aby odpovídající bazické bivektory  $B_k$  byly vlastními bivektory momentu setrvačnosti. Úhlovou rychlost  $\Omega_B$  rozepíšeme jako lineární kombinaci bazických bivektorů  $\Omega_B = \omega_k B_k$ , podobně celkový moment sil  $N = N_k R B_k \tilde{R}$ . Potom můžeme (3.5.4) přepsat jako

$$\begin{aligned} \dot{L} &= R\left(\sum_{k=1}^3 i_k \dot{\omega}_k B_k - \sum_{j,k=1}^3 \omega_j i_k \omega_k (B_j \times B_k)\right)\tilde{R} \\ &= \sum_{l=1}^3 \left(i_l \dot{\omega}_l + \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jkl} i_k \omega_k \omega_j\right) R B_l \tilde{R} = \sum_{l=1}^3 N_l R B_l \tilde{R}. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Přepis komutátoru bazických bivektorů pomocí Levi-Civitova tenzoru je vidět z následujícího výpočtu:

$$B_i \times B_j = \langle e_i I e_j I \rangle_2 = -\langle e_i e_j \rangle_2 = -\varepsilon_{ijk} B_k, \quad (3.5.6)$$

kde jsme využili pro přepis součinu bazických vektorů vztahu (1.2.9). Pokud mezi sebou budeme porovnávat pouze koeficienty na levé a pravé straně v rovnici (3.5.5), dostaneme klasickou podobu Eulerových setrvačnickových rovnice

$$\begin{aligned} i_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (i_2 - i_3) &= N_1, \\ i_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (i_3 - i_1) &= N_2, \\ i_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (i_1 - i_2) &= N_3. \end{aligned}$$

### 3.6 Symetrický bezsilový setrvačník

Bezsilový znamená  $N = 0$  a symetrický bude znamenat, že má dva hlavní momenty stejné a třetí různý, tedy  $i_1 = i_2 \neq i_3$ . Pokud opět zvolíme bázi tvořenou hlavními osami, pak působení momentu setrvačnosti na bivektor úhlové rychlosti  $\Omega_B$  můžeme rozepsat

$$\mathcal{I}(\Omega_B) = i_1 \omega_1 B_1 + i_1 \omega_2 B_2 + i_3 \omega_3 B_3 \quad (3.6.1)$$

$$= i_1 \Omega_B + (i_3 - i_1) \omega_3 B_3 \quad (3.6.2)$$

$$= i_1 \Omega_B + (i_3 - i_1) (\tilde{B}_3 \cdot \Omega_B) B_3. \quad (3.6.3)$$

Pohybová rovnice má pak tvar

$$\mathcal{I}(\dot{\Omega}_B) = \Omega_B \times \mathcal{I}(\Omega_B) = (i_3 - i_1) \Omega_B \times \left( (\tilde{B}_3 \cdot \Omega_B) B_3 \right). \quad (3.6.4)$$

Bivektor  $B_3$  můžeme skrz dualitu nahradit vektorem  $e_3$  a získat

$$\mathcal{I}(\dot{\Omega}_B) = (i_3 - i_1) \Omega_B \times ((\Omega_B \wedge e_3) e_3). \quad (3.6.5)$$

Pokud si uvědomíme, že  $\Omega_B \wedge e_3 = \omega_3 I$ , pak můžeme toto vyjádření algebraicky upravit do tvaru

$$\mathcal{I}(\dot{\Omega}_B) = -(i_3 - i_1) e_3 \wedge ((\Omega_B \wedge e_3) \Omega_B). \quad (3.6.6)$$

Z tohoto vyjádření pak přímo plyne, že

$$i_3 \dot{\omega}_3 I = e_3 \wedge \mathcal{I}(\dot{\Omega}_B) = 0. \quad (3.6.7)$$

Tedy  $\omega_3$  je konstantní, což lze přímo usoudit i z Eulerových rovnic. Dále z rovnice (3.6.2) vyjádříme

$$i_1\Omega_B = \mathcal{I}(\Omega_B) - (i_3 - i_1)\omega_3 B_3 \quad (3.6.8)$$

a dosadíme do vztahu pro úhlovou rychlost  $\Omega$

$$\Omega = R\Omega_B\tilde{R} = \frac{1}{i_1}L + \frac{i_1 - i_3}{i_1}\omega_3 RB_3\tilde{R}. \quad (3.6.9)$$

Tu nyní můžeme dosadit do rovnice pro rotor  $R$

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}\Omega R = -\frac{1}{2i_1}(LR + R(i_1 - i_3)\omega_3 B_3). \quad (3.6.10)$$

Označíme-li konstantní bivektory, které v rovnici vystupují, jako

$$\Omega_l = \frac{1}{i_1}L, \quad \Omega_r = \frac{i_1 - i_3}{i_1}\omega_3 B_3. \quad (3.6.11)$$

Takto naše rotorová rovnice získá tvar

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}\Omega_l R - \frac{1}{2}R\Omega_r. \quad (3.6.12)$$

Tu můžeme přímo vyřešit a získat řešení ve tvaru

$$R(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\Omega_l t\right) R_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\Omega_r t\right). \quad (3.6.13)$$

Tímto je kompletně popsán pohyb symetrického bezsilového setrvačnicku. Rotor obsahuje rotaci v rovině  $B_3$  kolmé na osu symetrie, to je zodpovědné za precesi osy rotace.  $R_0$  vyjadřuje počáteční podmínku, tedy natočení v čase  $t = 0$  a nakonec je výsledek rotován v rovině svého momentu hybnosti.

# Kapitola 4

## Geometrická algebra na varietách

### 4.1 Pseudoskalár variety

V této kapitole nebudeme uvažovat diferencovatelnou varietu ve vší obecnosti, ale omezíme se pouze na variety dimenze  $d$  vnořené do eukleidovského prostoru dimenze  $N$ , tedy  $d$ -dimenzionální plochy v  $\mathbb{R}^N$ . V tomto zjednodušení mají pro nás tečné vektory jasný geometrický význam. Tečný vektor k varietě  $\mathcal{M}$  v bodě  $x_0 \in \mathcal{M}$  si můžeme představit jako vektor ležící v tečné rovině v bodě  $x_0$ . Máme-li vnořovací funkci

$$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^N; \quad (u^1, \dots, u^d) \mapsto f(u^1, \dots, u^d),$$

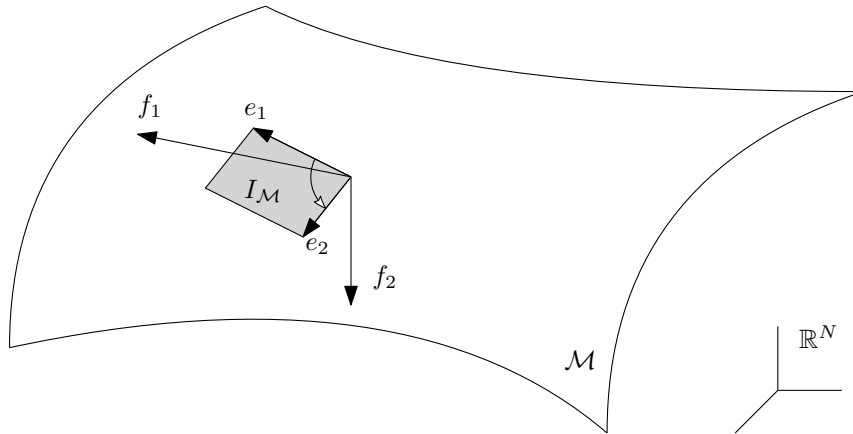
potom tečnou rovinu  $R$  k varietě  $\mathcal{M}$  v bodě  $x_0 \in \mathcal{M}$  získáme jako

$$R = f(x_0) + \text{span} \left\{ \left. \frac{\partial f}{\partial u^1} \right|_{x_0}, \dots, \left. \frac{\partial f}{\partial u^d} \right|_{x_0} \right\}.$$

Zkonstruujeme geometrickou algebru nad  $\mathbb{R}^N$  a označíme-li  $f_\mu(x) = \frac{\partial f}{\partial u^\mu}(x)$ , potom můžeme definovat funkci pseudoskaláru variety  $\mathcal{M}$

$$I_{\mathcal{M}} = \frac{1}{|f_1 \wedge \dots \wedge f_d|} f_1 \wedge \dots \wedge f_d. \quad (4.1.1)$$

Geometrický význam pseudoskaláru je vcelku zřejmý, v každém bodě  $x \in \mathcal{M}$  udává tečný prostor  $T_x \mathcal{M}$  i s určitou orientací, viz část 1.3.1 a obr. 4.1. Jedná se vlastně o zobecnění zobrazení *Gauss map*. To jakožto zobrazení přiřazuje vnořené varietě kodimenze jedna vnější normálu, tj. jednotkový vektor kolmý na všechny tečné vektory v daném bodě. Z pseudoskaláru  $I_{\mathcal{M}}$  získáme normálový prostor pro povrchy s kodimenzí větší než jedna skrze dualitu zprostředkovanou pseudoskalárem  $I$  ambientního prostoru  $\mathbb{R}^N$ . Pro variety kodimenze jedna dostaneme



Obrázek 4.1: Pseudoskalár  $I_{\mathcal{M}}$  variety  $\mathcal{M}$  vnořené do  $N$ -rozměrného eukleidovského prostoru je blade, který udává tečný prostor i s nějakou orientací.

vnější normálu předpisem

$$n = I_{\mathcal{M}}^{-1}I. \quad (4.1.2)$$

Pro ilustraci máme-li dvourozměrnou sféru  $\mathcal{S}$  o poloměru  $r$  vnořenou do  $\mathbb{R}^3$  předpisem

$$f(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad (4.1.3)$$

pak tečné vektory jsou

$$\begin{aligned} f_{\theta} &= r \cos \theta \cos \varphi c_1 + r \cos \theta \sin \varphi c_2 - r \sin \theta c_3, \\ f_{\varphi} &= r \sin \theta (-\sin \varphi c_1 + \cos \varphi c_2), \end{aligned}$$

kde  $\{c_k\}$  jsou vektory standardní báze  $\mathbb{R}^3$ . Pro zvyšování a snižování indexů bude později výhodná i metrika na sféře

$$(g_{\mu\nu}) = (f_{\mu} \cdot f_{\nu}) = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (4.1.4)$$

Z (4.1.1) vypočteme

$$I_{\mathcal{S}} = \sin \theta \cos \varphi B_1 + \sin \theta \sin \varphi B_2 + \cos \theta B_3, \quad (4.1.5)$$

kde  $B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}c_jc_k$  jsou bazické bivektory z vektorů standardní báze, viz část 1.2. Jednodušeji jsme se k tomuto výsledku mohli dobrat geometrickou úvahou, že pro každé  $x \in \mathcal{S}$  je  $\frac{x}{r}$  normálovým vektorem ke sféře v bodě  $x$ , potom tečná rovina v bodě  $x$  je dána bivektorem  $\frac{Ix}{r}$

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{S}} &= \frac{Ix}{r} = I(\sin \theta \cos \varphi c_1 + \sin \theta \sin \varphi c_2 + \cos \theta c_3) \\ &= \sin \theta \cos \varphi B_1 + \sin \theta \sin \varphi B_2 + \cos \theta B_3. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$



## 4.2 Shape operátor

Shape operátor variety  $\mathcal{M}$  v bodě  $x \in \mathcal{M}$  ve směru souřadnice  $x^\mu$  definujeme

$$S_\mu = I_{\mathcal{M}}^{-1} \partial_\mu I_{\mathcal{M}}. \quad (4.2.1)$$

Geometrická interpretace shape operátoru není tak přímočará jako u pseudo-skaláru. Pro začátek se pokusíme určit, o jaký objekt jde v rámci geometrické algebry. Vybereme ortonormální bázi  $T_x \mathcal{M}$  pomocí níž můžeme psát  $I_{\mathcal{M}} = e_1 \dots e_d$ , potom

$$\begin{aligned} S_\mu &= e_d \dots e_1 \sum_{k=1}^d e_1 \dots e_{k-1} \wedge (P(\partial_\mu e_k) + P_\perp(\partial_\mu e_k)) \wedge e_{k+1} \dots e_d \\ &= e_d \dots e_1 \sum_{k=1}^d e_1 \dots e_{k-1} P_\perp(\partial_\mu e_k) e_{k+1} \dots e_d \\ &= \sum_{k=1}^d e_k P_\perp(\partial_\mu e_k) = \sum_{k=1}^d e_k \wedge P_\perp(\partial_\mu e_k), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

kde  $P$  je projekce do tečného prostoru a  $P_\perp$  projekce do ortogonálního doplňku. Z normovací podmínky pro vektory  $e_k$  získáme

$$e_k \cdot (\partial_\mu e_k) = 0.$$

Odtud pak plyne, že i  $e_k \cdot P(\partial_\mu e_k) = 0$ . To znamená, že  $P(\partial_\mu e_k)$  je lineární kombinací ostatních vektorů báze, kromě vektoru  $e_k$ , a proto

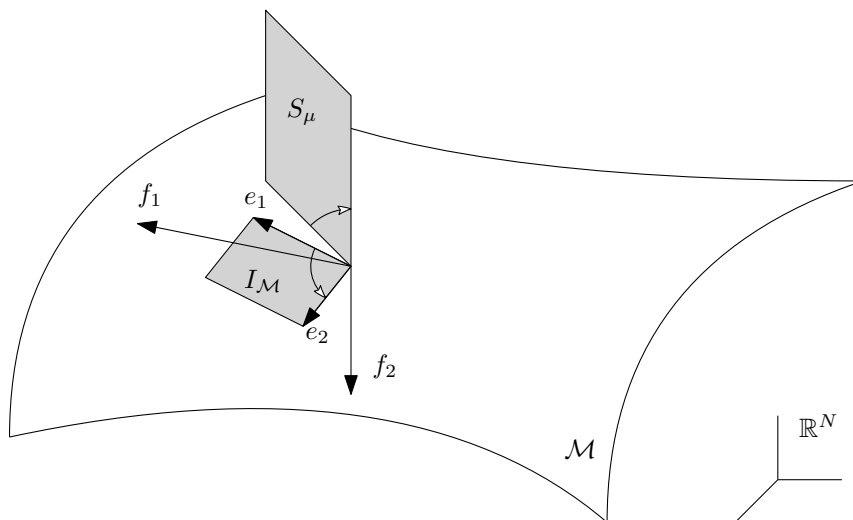
$$e_1 \wedge \dots \wedge e_{k-1} \wedge P(\partial_\mu e_k) \wedge \dots \wedge e_d = 0.$$

Je vidět, že  $S_\mu$  je bivektor ( $S_\mu dx^\mu$  je tedy 1-forma s hodnotami v bivektorech) a zároveň jednotlivé sčítance jsou tvaru vnějšího součinu tečného a normálového vektoru. To znamená, že bivektor  $S_\mu$  má pouze mixovanou část vzhledem k  $I_{\mathcal{M}}$ , viz část 1.3.1 a obr. 4.2, což můžeme zapsat jako

$$S_\mu = S_\mu \times I_{\mathcal{M}} I_{\mathcal{M}}^{-1}. \quad (4.2.3)$$

Z tohoto pozorování nebo z normalizační podmínky na  $I_{\mathcal{M}}$  lze ukázat, že  $S_\mu$  a  $I_{\mathcal{M}}$  spolu antikomutují. Odtud plyne rovnost

$$I_{\mathcal{M}} \times S_\mu = I_{\mathcal{M}} S_\mu = \partial_\mu I_{\mathcal{M}}. \quad (4.2.4)$$



Obrázek 4.2: Shape operátor  $S_\mu$  je bivektor, který částečně leží v tečném a normálovém prostoru. Zároveň zastává roli bivektoru úhlové rychlosti otáčení pseudoskaláru  $I_M$  při pohybu po varietě  $\mathcal{M}$ .

Porovnáme-li toto s rovnicí (3.2.5) pro bivektor úhlové rychlosti, můžeme shape operátor  $S_\mu$  interpretovat jako bivektor úhlové rychlosti otáčení tečného prostoru při pohybu po křivce souřadnice  $x^\mu$ .

Zajímavé je pozorování, jak se mění hodnota  $I_M$  při pohybu po křivce  $\gamma$  s tečným vektorem  $a$  takové, že  $\gamma(0) = x$ :

$$\begin{aligned} I_M(\gamma(\varepsilon)) &= I_M(x) + \varepsilon (a^\mu \partial_\mu I_M) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= I_M(x) + \varepsilon a^\mu (I_M \times S_\mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Porovnáme-li tento výsledek s (1.3.76), zjistíme, že nejde o nic jiného než infinitezimální rotaci  $I_M$  danou bivektorem  $a^\mu S_\mu$ .

Námi definovaný shape operátor představuje zobecnění Weingartenova shape operátoru. Ten je definován pro povrchy kodimenze jedna jako diferenciál zobrazení Gauss map [5, str. 386]. Weingartenův shape operátor  $S_W$  pak na bazické vektory působí

$$S_W(f_\mu) = \partial_\mu n = \partial_\mu I_M^{-1} I = -I_M^{-1} \partial_\mu I_M I_M^{-1} I = -S_\mu I_M^{-1} I \quad (4.2.6)$$

$$= -S_\mu n = n S_\mu = n \cdot S_\mu. \quad (4.2.7)$$

Jedná se vlastně o tečnou část námi definovaného shape operátoru. Weingartenův shape operátor je výhodný v případě, že nás zajímá křivost. Vlastní hodnoty operátoru odpovídají hlavním křivostem a determinant odpovídá Gaussově křivosti [5].

### 4.3 Paralelní přenos

Jak jsme viděli v předchozí části v rovnicích (4.2.4) a (4.2.5), shape operátor při malých posunutích stáčí pseudoskalár tak, aby zůstal tečným při pohybu z jednoho bodu do druhého po nějaké křivce. To je vlastně definice paralelního přenosu, avšak ne pro vektor, nýbrž pro  $d$ -blade  $I_{\mathcal{M}}$ . Infinitesimální paralelní přenos pro vektory můžeme definovat úplně stejně pomocí rotace. Mějme nějaký ne nutně tečný vektor  $v$  a křivku  $\gamma$  s tečným vektorem  $a$  takovou, že  $\gamma(0) = x$ , potom pro  $\varepsilon \ll 1$  definujeme

$$v(\gamma(\varepsilon)) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon a^\mu S_\mu} v(x) e^{\frac{1}{2}\varepsilon a^\mu S_\mu} = v(x) + \varepsilon a^\mu(x) v(x) \cdot S_\mu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.3.1)$$

Jelikož rotace komutují s geometrickým součinem, pak komutují i se součiny z něho odvozenými. Z toho plyne, že paralelně přenášený tečný vektor zůstává tečný tj. pokud  $v(x) \wedge I_{\mathcal{M}}(x) = 0$ , potom

$$\begin{aligned} v(\gamma(\varepsilon)) \wedge I_{\mathcal{M}}(\gamma(\varepsilon)) &= e^{-\frac{1}{2}\varepsilon a^\mu S_\mu} v(x) e^{\frac{1}{2}\varepsilon a^\mu S_\mu} \wedge e^{-\frac{1}{2}\varepsilon a^\mu S_\mu} I_{\mathcal{M}}(x) e^{\frac{1}{2}\varepsilon a^\mu S_\mu} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\varepsilon a^\mu S_\mu} (v(x) \wedge I_{\mathcal{M}}(x)) e^{\frac{1}{2}\varepsilon a^\mu S_\mu} = 0. \end{aligned}$$

Podobně se odvodí, že normálové vektory zůstávají normálové. Obdobnou argumentací se ukáže, že se zachovává skalární součin i norma vektorů.

Pokud nás zajímá konečný paralelní přenos, můžeme využít poznatků z kapitoly 3 o popisu pohybu tuhého tělesa s nějakou úhlovou rychlostí. Porovnáme-li (4.2.4) se vztahem pro bivektor úhlové rychlosti (3.2.5), kde místo  $\cdot$  můžeme psát i  $\times$  pro obecné multivektory, pak lze považovat shape operátor za bivektor úhlové rychlosti otáčení daného multivektoru při paralelním přenosu. To nás vede k myšlence uvažovat konečný paralelní přenos jako rotaci původního multivektoru

$$A(\gamma(\varepsilon)) = R_\gamma(\gamma(\varepsilon)) A(x) \tilde{R}_\gamma(\gamma(\varepsilon)). \quad (4.3.2)$$

Navíc v každém bodě křivky musí být splněna rovnice pro infinitesimální paralelní přenos. Pro rotor  $R_\gamma$  to znamená

$$R_\gamma(\gamma(\sigma + \varepsilon)) = e^{-\frac{\varepsilon}{2} a^\mu S_\mu} R_\gamma(\gamma(\sigma)). \quad (4.3.3)$$

Odtud dostáváme obdobu (3.2.10)

$$a^\mu \partial_\mu R_\gamma = -\frac{1}{2} a^\nu S_\nu R_\gamma, \quad R_\gamma(\gamma(0)) = 1, \quad (4.3.4)$$

kde  $a$  je tečný vektor křivky  $\gamma$ .

Nakonec se opět podíváme, jak vychází shape operátory a odpovídající paralelní přenos na dvourozměrné sféře v  $\mathbb{R}^3$ . Dosadíme-li (4.1.5) do definice, dostaneme

$$\begin{aligned} S_\theta &= -\sin \varphi B_1 + \cos \varphi B_2, \\ S_\varphi &= \sin \theta (-\cos \theta \cos \varphi B_1 - \cos \theta \sin \varphi B_2 + \sin \theta B_3). \end{aligned}$$

Budeme-li se pohybovat ve směru souřadnice  $\theta$ , tj. po nějakém poledníku, pak se v každém bodě bude paralelně přenášený vektor stáčet v rovině řezu koule dané tímto poledníkem. Na druhou stranu, pokud se budeme pohybovat ve směru souřadnice  $\varphi$ , tj. po nějaké rovnoběžce, bude se paralelně přenášený vektor v každém bodě stáčet v rovině kolmé na tečný vektor  $f_\theta$ .

Nakonec se krátce zmíníme o kovariantní derivaci a křivosti. Máme-li možnost paralelního přenosu, pak pomocí něj můžeme zavést kovariantní derivaci. Pro tu dostaneme vztah

$$D_\mu A(x) = \partial_\mu A(x) - A(x) \times S_\mu(x). \quad (4.3.5)$$

Křivost se tradičně definuje jako komutátor kovariantních derivací. Využitím vlastností shape operátoru nakonec tento komutátor vyjde

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) A = A \times (S_\mu \times S_\nu) = A \times \Omega_{\mu\nu}.$$

$\Omega_{\mu\nu}$  jsou složky 2-formy s hodnotami v bivektorech. Ty nesou informaci o vnitřní i vnější křivosti. Podrobnější odvození kovariantní derivace, křivosti a toho, jak souvisí s klasickými pojmy jako Riemannův tenzor křivosti, může čtenář nalézt v [6].

# Závěr

Geometrická algebra je v matematice známější pod názvem Cliffordova algebra. My jsme se rozhodli vyhnout se tomuto označení, neboť termín Cliffordova algebra používají matematici při kategorizaci algebraických struktur v matematice, což není naším zájmem. Naším cílem bylo demonstrovat užitečnost této algebraické struktury pro teoretickou fyziku a geometrii. Proto se naše pojmenování, podobně jako v [2] a [3], se odvolává na původní názvosloví použité Cliffordem.

V této práci jsme demonstrovali, jakým způsobem geometrickou algebru konstruovat a jak je výhodné mít algebraické nástroje pro práci s elementárními geometrickými operacemi, jako jsou rotace, zrcadlení a projekce. Viděli jsme, že mnoho konceptů známých z komplexních čísel jako algebraický zápis rotací, holomorfní funkce, Cauchyho integrální vzorec komplexní analýzy, atd. lze za pomoci geometrické algebry nahradit prvky vycházejícími z reálného vektorového prostoru a jednoduše zobecnit do obecné dimenze. Obecně se ukazuje, že se většinou lze použití komplexních čísel vyvarovat užitím geometrické algebry. Čtenáře bychom například odkázali na trefně pojmenovaný článek autorů Gull, Lasenby a Doran *Imaginary Numbers are not Real* (Imaginární čísla nejsou reálná/skutečná) [7]. Problém s komplexními čísly je v tom, že zakrývají geometrický obsah použitím jedné imaginární jednotky, naopak geometrická algebra obsahuje celou plejádu objektů, jejichž druhá mocnina je záporné číslo.

Nově nabitými nástroji geometrické algebry jsme byli schopni popsat pohyb tuhého tělesa a rychle a efektivně vyřešit úlohu bezsilového setrvačnicku. Připustění bivektorové úhlové rychlosti nás pak ve čtvrté kapitole vedlo k interpretaci shape operátoru jako bivektoru úhlové rychlosti otáčení tečného prostoru při pohybu po varietě. Toto pozorování nás inspirovalo k tomu, že budeme uvažovat paralelní přenos jako rotaci v prostoru, do kterého je varieta vnořena. Tento přístup je výhodný v případě, že bychom chtěli paralelně přenášet multivektorová pole. Multivektory, jedná-li se o rotaci, totiž podléhají stejnému transformačnímu vztahu jako vektory, a tak na ně lze paralelní přenos přímočaře rozšířit.

Řada výsledků v geometrické algebře nezávisí na signatuře daného prostoru. Proto ji lze velmi pohodlně používat i na Minkowského prostoročasu společně s operátorem vektorové derivace a orientovaným integrálem. Nicméně je třeba si

dávat pozor, že některé vektory a potažmo blady nemají multiplikativní inverzi. Je to dáno tím, že v prostorech s indefinitní kvadratickou formou existují nenulové vektory, jejichž druhá mocnina v geometrickém součinu je nulová (světlu podobné vektory).

Jak jsme viděli v části věnované trojrozměrnému eukleidovskému prostoru, lze geometrickou algebru reprezentovat jako algebru Pauliho matic nad reálným tělesem. Není pak divu, že geometrická algebra nachází uplatnění v kvantové mechanice, kde je naprosto přirozeným nástrojem pro popis spinorů a dovoluje pracovat v kvantové mechanice bez komplexních čísel [2, str. 267-336].

Zajímavou se jeví i možná aplikace geometrické algebry v diferenciální geometrii. Ve čtvrté kapitole jsme hovořili o geometrii vnořených variet do eukleidovského prostoru a všechna naše odvození se proto řídila naivním intuitivním modelem, kde body na varietě a tečné vektory existovaly ve stejném prostoru. Pokud bychom se pokoušeli o podobné konstrukce v duchu moderní diferenciální geometrie, museli bychom mít nějaký fibrovaný prostor, který lze lokálně trivializovat s typickým vláknem izomorfním eukleidovskému vektorovému prostoru dimenze  $N$ . Navíc budeme-li požadovat, aby kovariantní derivace zachovávala skalární součin, pak lze ukázat, že má tvar

$$D_\mu A = \partial_\mu A + A \times B_\mu, \quad (4.3.6)$$

kde  $B_\mu$  je nějaký bivektor z  $\mathcal{G}_N$  konstruované nad typickým vláknem. Mezi těmito kovariantními derivacemi pak existuje určitá speciální třída shape derivací, které odpovídají námi představené kovariantní derivaci pomocí shape operátoru. Tyto shape derivace zásadně zjednodušují vyjádření křivosti, a proto by mohly být význačné v kalibračních teoriích, v jejichž základech stojí kovariantní derivace a křivost.

# Literatura

- [1] P. LOUNESTO. *Clifford Algebras and Spinors*. Second Edition. Cambridge University Press, 2001. ISBN 0-521-00551-5.
- [2] C. DORAN a A. LASENBY. *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-71595-9.
- [3] D. HESTENES a G. SOBCZYK. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Springer, 1987. ISBN 978-90-277-2561-5.
- [4] D. J. H. GARLING. *Clifford Algebras: An Introduction*. Cambridge University Press, 2011. ISBN 978-1-107-09638-7.
- [5] E. ABBENA, S. SALAMON a A. GRAY. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. 3rd edition. Chapman and Hall/CRC, 2006. ISBN 978-1-58488-448-4.
- [6] V. ZATLOUKAL. Shape tensor and geometry of embedded manifolds [online]. [cit. 2020-07-29]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1808.03060>
- [7] S. GULL, A. LASENBY a Ch. DORAN. Imaginary number are not real: The geometric algebra of spacetime. *Foundations of Physics*. 1993, **23**. DOI: 10.1007/BF01883676.