

Poznámky k přednášce 02UCF
(Úvod do částicové fyziky – zaměření matematická fyzika)

(PRACOVNÍ VERZE)

Ing. Václav Zatloukal, PhD.
(cvičení: Ing. Tereza Lehečková)

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
České vysoké učení technické v Praze

vaclav.zatloukal@fjfi.cvut.cz
<http://www.zatlovac.eu>

Verze: 16. května 2026

Předmluva

Toto jsou poznámky k přednášce Úvod do částicové fyziky (02UCF) vyučované na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického v Praze, zaměřené na matematickou fyziku. Jedná se o jednosemestrální kurz s dotací 2 x 50 minut přednášek a 2 x 50 minut cvičení týdně. Součástí tohoto textu jsou i řešené příklady ke cvičením.

Předmět je vyučován v pátém semestru bakalářského studia a jeho cílem je poskytnout studentům (toho času bez znalostí kvantové teorie) kvalitativní přehled o fyzice mikrosvěta a matematických i experimentálních metodách, jež se k jejímu studiu používají.

Autor bude vděčný za upozornění na chyby v textu, popřípadě náměty na jeho zkvalitnění.

Obsah

Předmluva	i
1 Stručná historie částicové fyziky	1
1.1 Rané období	1
1.2 Začátek moderní éry	2
1.3 Standardní model částicové fyziky	3
1.4 Cvičení	6
2 Relativistická kinematika	13
2.1 Lorentzovy transformace	13
2.2 Rozpad částic	15
2.3 Rozptyl částic	16
2.4 Cvičení	18
3 Klasická teorie pole	24
3.1 Lagrangeův formalismus teorie pole	25
3.2 Symetrie a zachovávané veličiny	27
3.3 Cvičení	28
4 Elektrodynamika a kvantování polí	32
4.1 Cvičení	35
5 Lieovy grupy a algebry	37
5.1 Unitární grupy	38
5.2 Reprezentace Lieových algeber	40
5.3 Cvičení	42
6 Yang-Millovy kalibrační teorie	45
6.1 Abelovská teorie – elektromagnetismus	45
6.2 Obecné neabelovské kalibrační teorie	46
6.3 Cvičení	49
7 Elektroslabé sjednocení	52
7.1 Parita a její narušení ve slabých interakcích	52
7.2 Kalibrační teorie $SU(2) \times U(1)$	53
7.3 Cvičení	56

8 Spontánní narušení symetrie	58
8.1 Goldstoneův model	59
8.2 Higgsův mechanismus	60
8.3 Hmoty leptonů	61
8.4 Cvičení	63
9 Kvarkový model hadronů	65
9.1 Interakce a barvy kvarků	67
9.2 Cvičení	68
10 Poruchový rozvoj a renormalizace	71
10.1 Matice rozptylu a Feynmanovy diagramy	71
10.2 Renormalizace	73
10.3 Cvičení	75
11 Shrnutí standardního modelu	77
11.1 Cvičení	79
12 Za standardním modelem	80
12.1 Velké sjednocení	80
12.2 Temná hmota	80
13 Urychlovače a detektory	82
13.1 Urychlovače částic	82
13.2 Detekce částic	83
A Otázky ke zkoušce	85

Kapitola 1

Stručná historie částicové fyziky

1.1 Rané období

Naše pouť částicovou fyzikou začíná na sklonku 19. století, kdy byla již všeobecně uznávána představa hmoty složené z bezpočtu elementárních stavebních kamenů — **atomů**. Byla známa periodická tabulka prvků a stechiometrická pravidla chemických reakcí, kinetická teorie plynů vysvětlovala termodynamické vlastnosti plynů na základě pohybu atomů a molekul a krystalografie ukazovala, že geometrie krystalů je důsledkem pravidelného uspořádání na mikroskopické úrovni.

Roku 1897 J. J. Thompson pozoroval paprsky emitované z katody vlivem vysokého napětí a jejich ohyb v magnetickém poli. Díky tomu mohl určit poměr náboje ku hmotnosti (e/m) pro částice katodového záření, který byl zhruba 2000x větší než pro ionty vodíku. Částice katodového záření byly tedy mnohem lehčí než nejjednodušší atom a muselo jít o zcela novou základní složku hmoty. Tak byl nalezen **elektron**, první subatomární částice.

Elektricky neutrální atom bylo možné si představit jako systém záporně nabitých elektronů pohybujících se v silovém poli buzeném kladným nábojem. Podle Thompsonovy představy byl kladný náboj rozložen v celém objemu atomu a elektrony v něm byly umístěny jako rozinky v pudinku. Tento model atomu byl nicméně překonán v důsledku objevu **atomového jádra** Ernestem Rutherfordem v roce 1911. Ten ostřeloval tenkou zlatou fólii proudem α -částic, tedy kladně nabitými jádry helia, a pozoroval, do jakých směrů se v důsledku elektrické interakce rozptýlí. Podle pudinkového modelu by se α -částice jen mírně vychylovaly od svého původního směru. Rutherford nicméně pozoroval, že malá část se odrážela pod velkým úhlem (až 180° , tedy nazpět), což bylo možné vysvětlit pouze tak, že kladný náboj a téměř celá hmotnost atomu zlata jsou soustředěny ve velmi malé oblasti — v atomovém jádře, od kterého se α -částice dokáže odrazit jen při velmi blízkém setkání (viz Cvičení 1). Byl tedy navržen planetární model atomu (elektrony obíhají kolem jádra jako planety kolem Slunce) a zároveň byly položeny základy metody zkoumání struktury hmoty pomocí rozptylových experimentů.

V letech 1924 až 1927 byla formulována kvantová teorie, která zcela změnila představu o částicích jako takových, když je nahradila vlnovou funkcí, tedy jakýmsi vlnovým balíkem pravděpodobnosti, a stanovila pravidla pro výstavbu atomů a molekul na základě řešení Schrödingerovy rovnice. **Kvantová mechanika** dokázala vysvětlit celou řadu pozorování atomové spektroskopie (tedy pohlcování a vyzařování světla určitých vlnových délek), strukturu periodické tabulky prvků na základě pojmu atomových orbitalů a v neposlední řadě také vznik a zákonitosti chemických vazeb. Od této chvíle je tedy fundamentální fyzika formulována a studována v poněkud obtížně srozumitelné řeči kvantové teorie.

K objasnění struktury atomového jádra zásadně přispěly experimenty, ve kterých α -částice bombardovaly jádra berylia ${}^9_4\text{Be}$ za vzniku uhlíku ${}^{12}_6\text{C}$ a elektricky neutrálního „pronikavého záření“. To bylo původně považováno za elektromagnetické (tedy γ -) záření. V roce 1932 nicméně Chadwick pozoroval, jak toto záření vyrazí protony z parafínu a studiem jejich hybnosti usoudil, že pronikavé záření je ve skutečnosti tvořeno částicemi, jež do protonů pružně naráží a mají hmotnost podobnou hmotnosti protonu. Tak byl objeven **neutron** a s ním i moderní obraz jádra jako soustavy protonů a neutronů.

Dalším důležitým jevem byl β -rozpad, tedy spontánní emise elektronu z jádra za současného zvýšení protonového čísla o jedničku (např. proces ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^-$). Pozorované energie vyletujících elektronů však tvořily spojité spektrum, což bylo v rozporu s rozpadem na dva produkty (v takovém případě by měly mít elektrony pouze jednu možnou energii — viz Cvičení 3). Na základě zákona zachování energie tak Pauli v roce 1930 postuloval existenci nové neutrální částice, mnohem lehčí než elektron, která vzniká jako třetí produkt β -rozpadu (${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$). Původně pro ni navrhl název „neutron“, avšak po Chadwickově objevu těžké neutrální částice o dva roky později, tedy „těžkého neutronu“, se pro Pauliho lehkou neutrální částice ustálil název **neutrino**. β -rozpad tedy bylo možno chápat jako přeměnu neutronu na proton, elektron a (anti)neutrino.

Schrödingerova rovnice kvantové mechaniky, i přes četné úspěchy, trpěla z hlediska teorie zásadním nedostatkem — nebyla slučitelná s Einsteinovou speciální teorií relativity, neboť nebyla relativisticky invariantní. V roce 1928 proto Dirac formuloval základní rovnici **relativistické kvantové mechaniky**, jež byla tedy fundamentálnější a přesnější a navíc předpovídala zcela nový fenomén, jímž byla existence **antičástic**. Pro antičástici elektronu (tedy částici se stejnou hmotností ale opačným nábojem) se brzy ustálil název **pozitron**. V roce 1932 jej poprvé pozoroval Anderson v kosmickém záření jako stopu v mlžné komoře, jež měla v magnetickém poli stejný poloměr křivosti jako elektron (a tedy stejnou hmotnost), ale opačný směr zakřivení (tedy opačný náboj).

Kromě již zmíněných částic byl široce respektovanou částicí již přinejmenším od 20tých let rovněž **foton**, coby kvantum energie elektromagnetického záření. Částicovou povahu světla naznačovalo jednak Einsteinovo vysvětlení fotoelektrického jevu z roku 1905 a také Comptonův popis rozptylu elektromagnetického záření na elektronech z roku 1922 (viz Cvičení 2). Klasický Faradayův-Maxwellův koncept elektromagnetického pole byl proto nahrazen kvantovaným elektromagnetickým polem tvořeným fotony a podléhajícím zákonům kvantové teorie. (Tento pohled byl na konci 40tých let potvrzen, když se na jeho základě podařilo vysvětlit tzv. Lambův posun, tedy rozštěpení energetických hladin v atomu nad rámec Diracovy teorie.) Relativistická **kvantová teorie pole** se postupně etablovala jako univerzální nástroj pro popis mikrosvěta, kde všechny druhy částic jsou vnímány jako excitace (kvanta) jim příslušného kvantového pole.

Shrňme-li situaci v částicové fyzice v polovině 30tých let 20. století, lze říci, že za fundamentální částice byly považovány elektron, proton a neutron, z nichž je složena hmota (atomy, molekuly, atd.), a rovněž foton a poněkud exotické neutrino. Vytvořila se také představa o čtyřech typech fundamentálních sil. Kromě elektromagnetických a gravitačních sil, dobře známých už z klasické fyziky, se na scéně objevila **silná jaderná interakce**, která drží pohromadě nukleony (tj. protony a neutrony) v atomových jádrech a nakonec také **slabá interakce**, jež způsobuje β -rozpad.

1.2 Začátek moderní éry

Objev další částice na sebe nenechal dlouho čekat. V roce 1937 byla v kosmickém záření v mlžné komoře pozorována nabitá částice s hmotností výrazně větší než je hmotnost elektronu (0,5 MeV)

a zároveň znatelně menší než je hmotnost protonu (zhruba 1 GeV). Tuto částici dnes označujeme jako μ , **mion**, a její klidová hmotnost činí zhruba 105 MeV. Ve stavbě okolního světa (tj. ve struktuře atomů atd.) ovšem nehraje žádnou roli, a tak byla fyzikální komunitou přijímána s rozpaky. Nebylo jasné, k čemu ji příroda potřebuje, „kdo si ji objednal”. Poznamenejme nicméně, že v současném standardním modelu mikrosvěta figuruje takovýchto „nadbytečných” částic hned několik.

O dva roky dříve navrhl Yukawa teorii jaderných sil, v níž prostředníkem silné interakce mezi nukleony byla částice, kterou dnes nazýváme **pion** (π -mezon). Pion měl tedy podobnou roli jako foton coby zprostředkovatel (mediátor) elektromagnetické interakce mezi elektricky nabitými částicemi. Z kvantové teorie pole vyplývá, že dosah interakce je dán Comptonovou vlnovou délkou $\hbar/mc$ zprostředkující částice. (Na větších vzdálenostech je interakce exponenciálně utlumena.) Pro nehmotné fotony dává tento vzorec nekonečný dosah Coulombovy interakce, zatímco pro předpokládaný dosah silné interakce řádově 10^{-15} m, což odpovídá typickému rozměru jádra, dostáváme odhad hmotnosti pionu řádově 200 MeV.

Pion a mion byly vzhledem k podobné hmotnosti původně považovány za tutéž částici. Brzy se však ukázalo, že miony (částice kosmického záření) nepodléhají narozdíl od pionů silné interakci. Obecně se částicím, které necítí silnou interakci říká **leptony** (z řeckého *leptós* — drobný, lehký). Patří mezi ně elektron e , mion μ a, jak již dnes víme, také tauon τ (nejtěžší lepton, který je ve skutečnosti těžší než proton!). K nim je ještě třeba připočítat odpovídající neutrina ν_e , ν_μ a ν_τ a ke každé z těchto šesti částic také příslušnou antičástici.

Naopak částice, na něž kromě slabých a elektromagnetických sil působí také silná interakce, se nazývají **hadrony** (z řeckého *hadrós* — silný, statný). Ty se dále dělí na **baryony**, což jsou fermiony (např. proton či neutron), a na **mezony**, což jsou bosony (např. pion). Z dnešního pohledu můžeme říct, že baryony jsou částice složené ze tří kvarků, zatímco mezony se skládají ze dvou kvarků. Jak se ale fyzikové dostali ke konceptu kvarků coby stavebních kamenů hadronů?

Začátkem 50tých let byla v kosmickém záření objevena řada nových hadronů: nabitě a neutrální **kaony** K^+ a K^0 (mezony) a **hyperony** (metastabilní baryony těžší než proton) Λ , Σ^+ a Ξ^- . Podstatný pokrok přinesly experimenty na urychlovačích, které umožnily systematicky a kontrolovaně studovat procesy produkce nových částic. Kolem roku 1962 tak bylo známo již zhruba třicet hadronů (včetně extrémně krátce žijících tzv. **rezonancí**) a dále jich přibývalo. Hledal se tedy organizační princip, který by dal této „hadronové zoo” určitý řád (podobně jako Mendělejevova periodická tabulka dokázala uspořádat chemické prvky). Za zmínku stojí, že kromě stabilního protonu a téměř stabilního neutronu (volný se rozpadá zhruba za 15 minut, ale v mnoha jádrech je stabilní díky vazebné energii) nepřesahuje střední doba života hadronů zhruba 10^{-10} s.

1.3 Standardní model částicové fyziky

Současnému popisu mikrosvěta, tedy **standardnímu modelu** (částicové fyziky) se budeme věnovat především v druhé polovině semestru. V této kapitole proto jen stručně zmíníme jeho hlavní rysy.

Již od 30tých let se hadrony zařazovaly do tzv. izospinových multipletů na základě podobné hmotnosti. Proton s neutronem tak tvořily izospinový dublet, piony π^- , π^0 a π^+ izospinový triplet a systematika hadronů identifikovala různé další vyšší multiplety. Postupně se ukázalo, že hadrony lze vnímat jako částice nikoliv elementární, nýbrž složené z několika málo konstituentů, **kvarků**, které jsou v hadronech trvale uvězněny a nepozorují se jako volné částice. Hlavním proponentem kvarkového modelu byl Gell-Mann, který postuloval existenci tří kvarků u (up), d (down) a s (strange) s neceločíselnými hodnotami elektrického náboje, po řadě $+2/3$, $-1/3$

a $-1/3$. Tato volba reprodukuje náboje známých hadronů: např. proton má kvarkové složení uud , neutron udd a dalšími kombinacemi kvarků a antikvarků bylo možné vytvořit i další známé mezony (dvoukvarkové kombinace) a baryony (tříkvarkové kombinace). Dnes víme, že kvarků existuje celkem šest — ještě c (charm, náboj $+2/3$), t (top, náboj $+2/3$) a b (bottom, náboj $-1/3$).

Vraťme se nyní k β -rozpadu, tedy k procesu $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$. (Stojí za povšimnutí, že na úrovni kvarků se jedná o proces $d \rightarrow u + e + \bar{\nu}_e$.) Ten je způsoben slabou interakcí, která podle původní Fermiho teorie z poloviny 30tých let působí přímo mezi čtyřmi zúčastněnými částicemi. Analogie s elektromagnetickou či silnou jadernou silou nicméně vybízí k zavedení hypotetické zprostředkující částice, která musí být dostatečně těžká, aby zaručila krátký dosah slabé interakce. Navíc se musí jednat o nabitý boson, neboť působí mezi čtveřicí různě nabitých fermionů. Tento tzv. **intermediální vektorový boson W** (z angl. „weak”) zůstal po dlouhou dobu pouze vhodným teoretickým konstruktem, díky němuž byla teorie tzv. **renormalizovatelná**, tedy platná i při vysokých energiích. V roce 1983 byl konečně detekován. Jeho hmotnost je 80 GeV (dvakrát těžší než molekula CO_2) a doba života řádově 10^{-25} s.

Zvláštní vlastností slabých interakcí je **narušení parity**, tedy zrcadlové symetrie, jež v roce 1956 navrhli Lee a Yang. Záhy byl tento jev několika experimenty potvrzen. Ukázalo se například, že v jaderném β -rozpadu se produkuje víc levotočivých než pravotočivých elektronů, přičemž vysokorychlostní elektrony jsou téměř vždy levotočivé, tj. narušení parity je maximální. Točivost popisuje veličina známá jako *helicity*, což je projekce *spinu* (jakéhosi kvantového vnitřního momentu hybnosti částice) do směru pohybu.

Matematický popis slabých interakcí je založen na Yang-Millsově neabelovské **kalibrační teorii**. Zjednodušená abelovská verze této teorie je vlastně teorie elektromagnetického pole v řeči čtyřpotenciálu A_μ , který při kalibrační transformaci nemění intenzitu pole $F_{\mu\nu}$. Slovo „neabelovské” znamená, že složky čtyřpotenciálu nejsou jen reálné funkce, ale mají hodnoty v maticích. Díky této formulaci se v druhé polovině 60tých let podařilo Glashowovi, Weinbergovi a Salamovi sjednotit elektromagnetickou a slabou interakci v tzv. **elektroslabou interakci**, jejímiž mediátory jsou foton γ , nabité vektorové bosony $W^\pm$ a navíc ještě neutrální vektorový boson Z^0 , jakýsi spojovací můstek mezi slabým a elektromagnetickým sektorem.

Zavedení hmoty vektorových bosonů konzistentním způsobem není vzhledem ke kalibrační invarianci Yang-Millsovy teorie zcela přímočaré. Slouží k němu myšlenka spontánního narušení symetrie a tzv. Higgsův mechanismus, jenž zavádí navíc jednu neutrální skalární částici — **Higgsův boson**. Ten je možno využít i ke generaci hmot všech fermionů standardního modelu, tedy kvarků a leptonů. Higgsův boson, jehož klidová hmotnost je 125 GeV, byl objeven v roce 2012 na kruhovém urychlovači LHC v CERNu a tím byla prakticky dokončena experimentální verifikace současného standardního modelu částicové fyziky. Dokud tedy nedojde k dalšímu fyzikálnímu průlomů, je náš obraz o fundamentálních konstituentech mikrosvěta následující: existuje

- 6 leptonů $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$,
- 6 kvarků u, d, c, s, t, b , z nichž jsou složeny hadrony,
- zprostředkovatelé elektroslabé interakce γ, W, Z ,
- zprostředkovatelé silné interakce, tj. **gluony g** (v celkem 8 verzích)
- a Higgsův boson H .

Poněkud stranou stojí gravitační síla, kterou se zatím nepodařilo konzistentně propojit s kvantovou teorií pole. Pro hypotetické částice (kvanta) gravitačního pole se nicméně vžil název **gravitony**.

Na závěr ještě krátce k silným interakcím, tedy silám působícím mezi kvarky (a tím pádem indukujícím i síly mezi hadrony). Kvarky se kromě „příchuti“ („flavoru“, tedy typu kvarku) liší ještě **barvou**, jakousi obdobou elektrického náboje. Existují celkem tři různé barvy a ke každé ještě barva opačná. Silné interakce jsou opět popsány jistou neabelovskou kalibrační teorií, tzv. **kvantovou chromodynamikou** (QCD), s celkem osmi mediátory, gluony. Pozoruhodnou vlastností silných interakcí je jejich **asymptotická volnost**, která znamená, že mezikvarková síla na malých vzdálenostech vymizí. Naopak se zvyšující se vzdáleností síla lineárně roste, jakoby kvarky byly spojené pružinkami. To je zcela opačné chování než v případě Coulombovy síly. Volné kvarky se tak za normálních okolností nevyskytují, nýbrž jsou vázány (uvězněny, angl. „confined“) v hadronech a jejich barevný náboj není přímo pozorovatelný. V experimentech se srážkami těžkých atomových jader lze nicméně docílit extrémních stavů charakterizovaných mimořádně vysokou teplotou a hustotou, v nichž se nukleony „roztaví“ a v oblasti srážky se krátkodobě vytvoří tzv. **kvark-gluonové plazma** (takový stav hmoty zřejmě musel existovat i v raných fázích vývoje vesmíru).

1.4 Cvičení

Cvičení 1. *Rutherfordův rozptyl.*

Uvažujte (nerelativistický) rozptyl částice s nábojem $q > 0$ a hmotností m na částici s nábojem $Q > 0$ a hmotností $M \gg m$ vlivem Coulombovy síly. Označte v velikost rychlosti lehčí (nalétávající) částice a předpokládejte, že těžší (terčíková) částice je v klidu.

1. Na jakou nejmenší vzdálenost se mohou částice přiblížit?
2. Nalezněte vztah mezi impaktním parametrem b a úhlem rozptylu θ .
3. Určete diferenciální účinný průřez $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

Řešení:

1. Předpokládáme pružný rozptyl dvou bodových částic, čelní náraz (tj. impaktní parametr $b = 0$). V bodě maximálního přiblížení se energie nalétávající částice (asymptoticky čistě kinetická) plně přemění na potenciální, tj.

$$E \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r_{min}}, \quad (1.1)$$

tedy

$$r_{min} = \frac{k}{E}, \quad (1.2)$$

kde $k = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$.

Číselně: pro α částici $m = 6,64 \times 10^{-27}$ Kg ($= 3,73 \times 10^9$ eV c^{-2}), $q = 3,2 \times 10^{-19}$ C, jako terčíkové jádro zvolme zlato $Q = 1,27 \times 10^{-17}$ C a rychlost nalétávání $v = 2 \times 10^7$ m s^{-1} . Pak $r_{min} = 2,7 \times 10^{-14}$ m ($= 27$ fm).

2. Využijeme zákony zachování energie, momentu hybnosti a Laplace-Runge-Lentzova vektoru, který je definován (viz TEF) vztahem

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + k \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.3)$$

a zachovává se pro centrální potenciál $\propto \frac{1}{r}$.

Označme iniciální stavy veličin indexem (i) a finální indexem (f) (oba asymptoticky daleko od centra) a zavedme jednotkové směrové vektory $\mathbf{e}_{(i,f)}$ vztahy

$$\mathbf{v}_{(i)} = v_{(i)}\mathbf{e}_{(i)}, \quad \mathbf{v}_{(f)} = v_{(f)}\mathbf{e}_{(f)}. \quad (1.4)$$

Ze zákona zachování energie plyne, že velikosti obou rychlostí jsou shodné (v asymptotické oblasti potenciální část energie vymizí) a budeme proto psát $v_{(i)} = v_{(f)} \equiv v$. Asymptoticky zároveň platí

$$\frac{\mathbf{r}_{(i)}}{r_{(i)}} = -\mathbf{e}_{(i)} \quad , \quad \frac{\mathbf{r}_{(f)}}{r_{(f)}} = \mathbf{e}_{(f)}. \quad (1.5)$$

Moment hybnosti se zachovává, můžeme tedy psát

$$\mathbf{L}_{(i)} = m v b \boldsymbol{\ell} = \mathbf{L}_{(f)}, \quad (1.6)$$

kde ℓ je jednotkový vektor (kolmý k rovině rozptylu).

Nyní už můžeme vyjádřit inerciální Laplace-Runge-Lenzův vektor jako

$$\mathbf{A}_{(i)} = (v\mathbf{e}_{(i)}) \times (m\mathbf{v}b\ell) - k\mathbf{e}_{(i)} = 2Eb\mathbf{n}_{(i)} - k\mathbf{e}_{(i)} \quad (1.7)$$

a analogicky finální jako

$$\mathbf{A}_{(f)} = 2Eb\mathbf{n}_{(f)} + k\mathbf{e}_{(f)}, \quad (1.8)$$

kde jsme zavedli jednotkové vektory $\mathbf{n}_{(i,f)} = \mathbf{e}_{(i,f)} \times \ell$, ležící v rovině rozptylu.

Úhel rozptylu θ je úhel mezi směry $\mathbf{e}_{(i)}$ a $\mathbf{e}_{(f)}$. Určíme jej ze vztahu $\mathbf{A}_{(i)} = \mathbf{A}_{(f)}$ skalárním součinem s $\mathbf{e}_{(i)}$. Dostáváme

$$-k = -2Eb \sin \theta + k \cos \theta, \quad (1.9)$$

z čehož úpravou pomocí polovičních úhlů plyne

$$b(\theta) = \frac{k}{2E} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{k}{2E} \cot \frac{\theta}{2}. \quad (1.10)$$

3. Částice s impaktním parametrem v intervalu $(b, b + db)$ a s azimutálním úhlem $(\varphi, \varphi + d\varphi)$ prolétávají ploškou $d\sigma = b db d\varphi$ a rozptylují se do úhlů v intervalu $(\theta, \theta + d\theta)$ a $(\varphi, \varphi + d\varphi)$, tedy do elementu prostorového úhlu $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Z definice diferenciálního účinného průřezu a vztahu (1.10) pak dostáváme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left(\frac{k}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (1.11)$$

Cvičení 2. Rozptyl elektromagnetického záření na elektronu.

Určete diferenciální účinný průřez (Thomsonova) rozptylu klasického elektromagnetického záření na elektronu jako poměr vyzářené intenzity vztažené na prostorový úhel a intenzity dopadající vlny (vztažené na plochu).

Řešení:

1. Využijeme Larmorovu formuli pro vyzařování náboje (viz VOF)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \langle a^2 \rangle_t \sin^2 \alpha, \quad (1.12)$$

jež určuje vyzářený výkon P na jednotkový prostorový úhel Ω , kde q je náboj a α je úhel mezi směrem urychlení náboje a směrem pozorování vyzářené vlny. Potřebujeme najít časovou střední hodnotu velikosti zrychlení náboje $\mathbf{a}$.

Uvažujme nejprve lineární polarizované světlo, tedy elektrická část $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$. Máme nerelativistický problém, můžeme tedy zanedbat magnetickou část Lorentzovy síly $\mathbf{F}_L$ a psát

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_L}{m_e} = \frac{q\mathbf{E}_0}{m_e} \cos \omega t. \quad (1.13)$$

Nalezením časové střední hodnoty a dosazení do formule (1.12) dostáváme (pro $q = -e$)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \alpha. \quad (1.14)$$

Diferenciální účinný průřez pro rozptyl záření je definován jako poměr vyzářeného toku vztaheného na prostorový úhel a incidenčního toku vztaheného na plochu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dP}{d\Omega}}{\langle S \rangle_t}, \quad (1.15)$$

kde $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ je Poyntingův vektor (tok energie vztahený na plochu) a S jeho velikost. Neboť elektrické a magnetické pole jsou na sebe kolmá a $E = cB$, je časová střední hodnota dána jako ($\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$)

$$\langle S \rangle_t = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \langle \cos^2 \omega t \rangle_t = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \quad (1.16)$$

a tedy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \alpha, \quad (1.17)$$

kde $r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$ má fyzikální rozměr délky.

2. Pokud je světlo nepolarizované, zavedeme soustavu

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \psi \mathbf{e} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{k} \times \mathbf{e} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad (1.18)$$

kde $\mathbf{n}$ je směr pozorování, $\mathbf{e}$ (obecná) polarizace a $\mathbf{k}$ směr přicházející radiace.

Jelikož $\cos \alpha = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \sin \theta \cos \psi$ a tedy $\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi$, dostáváme vystředováním přes úhel polarizace ($\langle \cos^2 \psi \rangle_\psi = 1/2$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (1.19)$$

Poznámky:

Přesnější kvantová (Klein-Nishinova) formule pro elektromagnetické záření tvořené fotony má tvar

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda'} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2 \theta \right), \quad \text{kde} \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \quad (1.20)$$

je *Comptonův posun* vlnové délky rozptýleného fotonu. Ten je zanedbatelný pro $\hbar\omega \ll m_e c^2$, tedy dostatečně dlouhé vlnové délky fotonů, kdy vzorec (1.20) přechází v (1.19).

Cvičení 3. β -rozpad.

Uvažujte dva procesy rozpadu neutronu v jeho klidové soustavě:

1. dvoučásticový rozpad $n \rightarrow e^- + p^+$ na elektron a proton;
2. tříčásticový rozpad $n \rightarrow e^- + p^+ + \bar{\nu}_e$ na elektron, proton a antineutrino.

Jaké jsou v obou případech možné energie vylétujícího elektronu? (Pracujte v jednotkách $c = 1$.)

Řešení:

1. Použijeme zákon zachování čtyřhybnosti

$$p_n = p_e + p_p \quad \rightarrow \quad p_n - p_e = p_p. \quad (1.21)$$

Pro částici s klidovou hmotností m platí $p^2 = m^2$. V klidové soustavě neutronu je navíc $p_n = (m_n, \mathbf{0})$. Umocněním čtyřvektorové rovnice na druhou tedy dostáváme

$$m_n^2 - 2m_n E_e + m_e^2 = m_p^2 \quad \rightarrow \quad E_e = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2}{2m_n} \quad (1.22)$$

Vidíme, že energie elektronu má jednu konkrétní hodnotu, kterou můžeme pro $m_p \approx m_n \gg m_e$ aproximovat jako

$$E_e \approx \frac{(m_n + m_p)(m_n - m_p)}{2m_n} \approx m_n - m_p \doteq 939,56 \text{ MeV} - 938,27 \text{ MeV} = 1,29 \text{ MeV}. \quad (1.23)$$

(Pro srovnání, klidová hmotnost elektronu je 0,51 MeV.) Ze známých relativistických vztahů

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m}{E} \quad (1.24)$$

pak můžeme určit rychlost elektronu

$$\beta_e = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E_e^2}} \doteq 0,92. \quad (1.25)$$

2. Zákon zachování čtyřhybnosti má nyní tvar

$$p_n - p_e = p_p + p_\nu, \quad (1.26)$$

jehož umocněním dostáváme

$$m_n^2 - 2m_n E_e + m_e^2 = (p_p + p_\nu)^2 = m_p^2 + m_\nu^2 + 2p_p \cdot p_\nu. \quad (1.27)$$

Hodnotu pravé strany, konkrétně Lorentzova součinu $p_p \cdot p_\nu$, však relativistická kinematika nefixuje. Energie elektronu E_e může nabývat různých hodnot, jejichž pravděpodobnostní rozdělení poskytuje až kvantová teorie slabých interakcí.

Urceme alespoň nejvyšší povolenou energii elektronu E_e^{max} . V těžištové soustavě systému proton–neutrino můžeme odhadnout pravou stranu rovnice (1.27) jako

$$(p_p + p_\nu)^2 = (E_p + E_\nu)^2 \geq (m_p + m_\mu)^2. \quad (1.28)$$

Vzhledem k Lorentzově invarianci obou stran je tento odhad platný v kterékoliv vztažné soustavě a můžeme proto vyjádřit

$$E_e \leq \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2}{2m_n} \equiv E_e^{max}. \quad (1.29)$$

Pro $m_\nu = 0$ je E_e^{max} shodná s hodnotou energie elektronu při dvoučásticovém rozpadu (rovnice (1.22)).

Cvičení 4. *Bohrův poloměr atomu vodíku.*

Dvěma způsoby odhadněte poloměr atomu vodíku r_a .

1. Vytvořte z elementárních konstant $\hbar$ (redukováná Planckova konstanta), e (elementární náboj), m_e (klidová hmotnost elektronu) a ε_0 (permitivita vakua) veličinu rozměru délky.
2. Určete poloměr kruhové orbity elektronu s momentem hybnosti $L = \hbar$.

Řešení:

1. Použijeme rozměry konstant v jednotkách SI,

$$\begin{aligned} [\hbar] &= \text{Kg m}^2 \text{s}^{-1}, \\ [e] &= \text{C}, \\ [m_e] &= \text{Kg}, \\ [\varepsilon_0] &= \text{C}^2 \text{Kg}^{-1} \text{m}^{-3} \text{s}^2, \end{aligned} \quad (1.30)$$

a skládáme z nich veličinu rozměru délky r_a . Má tedy platit

$$[r_a] = [\hbar]^{n_1} [e]^{n_2} [m_e]^{n_3} [\varepsilon_0]^{n_4} = \text{m}^1, \quad (1.31)$$

což vede na soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

s řešením

$$n_1 = 2, \quad n_2 = -2, \quad n_3 = -1, \quad n_4 = 1 \quad \rightarrow \quad r_a = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e}. \quad (1.33)$$

2. Na kruhové orbitě se sobě rovnají dostředivá a Coulombova síla:

$$\frac{m_e v^2}{r_a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_a^2}. \quad (1.34)$$

Pro moment hybnosti navíc máme

$$L \equiv r_a m_e v = \hbar, \quad (1.35)$$

což nám umožňuje eliminovat rychlost v a vyjádřit poloměr orbity

$$r_a = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e}. \quad (1.36)$$

(Ten se liší od výsledku (1.33) bezrozměrným faktorem 4π , který rozměrová analýza samozřejmě neurčuje.)

Cvičení 5. Rozpad částic.

Nechť λdt je pravděpodobnost rozpadu částice za čas dt , kde λ je rozpadová konstanta.

1. Jaká je pravděpodobnost rozpadu částice za čas t ? Kdy je tato pravděpodobnost rovna $1/2$?

2. Mějme N_0 částic v čase $t = 0$. Jaké je pravděpodobnostní rozdělení počtu částic v libovolném čase t ? Určete jeho střední hodnotu a relativní varianci. Jak se toto rozdělení chová pro velké N_0 .

Řešení:

1. Spočítáme nejdříve tzv. „survival probability” $S(t)$, tj. pravděpodobnost, že se částice za čas t nerozpadne. Interval $[0, t]$ rozdělíme na n časových kroků délky $\Delta t = t/n$. Pravděpodobnost přežití po krátký časový úsek Δt je $1 - \lambda \Delta t$ a pravděpodobnost přežití po celý časový interval je tedy

$$S(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{-\lambda t}. \quad (1.37)$$

Pravděpodobnost, že se částice za čas t naopak rozpadne je pak

$$P(t) = 1 - S(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (1.38)$$

Požadavek $P(t_{1/2}) = \frac{1}{2}$ vede na vzorec pro *poločas rozpadu*

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (1.39)$$

2. Pravděpodobnost, že se daná částice nerozpadne za čas t je dána funkcí $S(t) = e^{-\lambda t}$. Máme-li N_0 stejných nezávislých částic v čase $t = 0$, pak počet (nerozpadlých) částic v čase t , který označíme jako $N(t)$, je náhodná veličina, jejíž pravděpodobnostní rozdělení má tvar

$$P_t(n) = \Pr(N(t) = n) = \binom{N_0}{n} S(t)^n (1 - S(t))^{N_0 - n}. \quad (1.40)$$

(Z N_0 částic vybíráme n , které se nerozpadly, a ostatních $N_0 - n$ částic se rozpadlo.)

Střední hodnotu a varianci náhodné veličiny $N(t)$ ve fixním čase t lze určit za pomoci generující funkce

$$M(x) = \sum_{n=0}^{N_0} e^{nx} P_t(n) = (1 - S + e^x S)^{N_0}. \quad (1.41)$$

(Můžeme rovněž snadno ověřit správnou normalizaci pravděpodobnostního rozdělení — $M(0) = 1$.) Střední hodnotu získáme derivací jako

$$\langle n(t) \rangle = \left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=0} = N_0 e^x S (1 - S + e^x S)^{N_0 - 1} \Big|_{x=0} = N_0 S \quad (1.42)$$

a druhý moment jako

$$\langle n^2(t) \rangle = \left. \frac{d^2 M}{dx^2} \right|_{x=0} = N_0 S + N_0(N_0 - 1)S^2. \quad (1.43)$$

Relativní variance je tedy

$$\frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{N_0 S (1 - S)}{N_0^2 S^2} = \frac{1}{N_0} \frac{1 - S}{S} \quad (1.44)$$

a pro velká N_0 se limitně blíží k nule. Náhodnou veličinu $N(t)$ je potom možné přibližně ztotožnit s jejím průměrem $\langle n(t) \rangle$ a psát *rozkadový zákon* ve tvaru

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (1.45)$$

(Jedná se o manifestaci *zákona velkých čísel* z teorie pravděpodobnosti.)

Kapitola 2

Relativistická kinematika

Molekulová fyzika se zabývá objekty složenými z atomů, atomová fyzika zkoumá objekty složené z jádra a elektronů, jaderná fyzika studuje soustavy protonů a neutronů. Částicová fyzika, někdy též nazývaná fyzikou vysokých energií, zkoumá procesy na subjaderných škálách. K tomu je zapotřebí dosáhnout velkých rychlostí zúčastněných částic (až blízkých rychlosti světla) a neobejdeme se proto bez **speciální teorie relativity**.

2.1 Lorentzovy transformace

Pohybový stav každé částice je charakterizován její **čtyřhybností** $p^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$. Klidová hmotnost m je dána relativistickým vztahem mezi energií a hybností

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2, \quad \text{kde} \quad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu \quad \text{a} \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.1)$$

je Minkowskiho prostoročasová metrika. (Samozřejmě používáme Einsteinovu sumační konvenci.) Veličina $p^\mu p_\mu$ je invariantní vůči **Lorentzovým transformacím** $p'^\mu = L^\mu_\nu p^\nu$. Ty mohou být tímto požadavkem naopak definovány, neboť z polarizační identity vyplývá, že pak

$$\forall p^\mu, q^\mu : \quad p'^\mu q'_\mu = g_{\mu\nu} L^\mu_\rho p^\rho L^\nu_\sigma q^\sigma \stackrel{!}{=} g_{\rho\sigma} p^\rho q^\sigma \quad \rightarrow \quad g_{\mu\nu} L^\mu_\rho L^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}. \quad (2.2)$$

Lorentzovy transformace jsou tedy matice $L = (L^\mu_\nu)$, jejichž komponenty splňují kvadratickou vazbu (2.2). Identifikujeme 3 nezávislé rotace a 3 boosty tvořící dohromady 6-parametrickou Lorentzovu grupu. Studium této grupy (jakož i jiných spojitých grup) se značně zjednoduší a zpřehlední využijeme-li tzv. **generátory** a jim odpovídající infinitesimální transformace.

Pro začátek uvažujme čistě prostorovou rotaci kolem osy z o malý úhel ε :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad \mathbf{x}' \approx \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{M}_3 \mathbf{x}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Matice $\mathbf{M}_3$ je generátorem rotace kolem osy z a to v tom smyslu, že s její pomocí můžeme vyjádřit rotaci o libovolný konečný úhel θ . Tu totiž můžeme psát jako sekvenci (nekonečně) velkého počtu (nekonečně) malých rotací

$$\mathbf{R}_3(\theta) = (\mathbf{R}_3(\theta/N))^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} + \frac{\theta}{N} \mathbf{M}_3 \right)^N = \exp(\theta \mathbf{M}_3). \quad (2.4)$$

V posledním kroku jsme využili známý vzorec pro exponenciálu jako limitu posloupnosti. (Je však třeba zdůraznit, že v tomto případě vystupuje v exponenciále matice, ne jen obyčejné číslo.)

Rotaci o malý úhel ε okolo obecné osy určené jednotkovým vektorem $\mathbf{n}$ můžeme vyjádřit za použití vektorového součinu jako

$$x'^j \approx x^j + \varepsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{x})^j = x^j + \varepsilon n^i \varepsilon_{ijk} x^k = x^j + \varepsilon n^i (\mathbf{M}_i)^j_k x^k, \quad \text{kde } (\mathbf{M}_i)^j_k = -\varepsilon_{ijk}. \quad (2.5)$$

Generátorem rotace kolem osy $\mathbf{n}$ je tedy matice $n^i \mathbf{M}_i$ a konečnou rotaci o úhel θ tak dostaneme exponenciací jako

$$\mathbf{R}_n(\theta) = \exp(\theta^i \mathbf{M}_i), \quad \text{kde } \theta^i \equiv \theta n^i. \quad (2.6)$$

Máme tedy tři (lineárně) nezávislé generátory $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}_3$ odpovídající rotacím kolem jednotlivých souřadných os a jejich lineárními kombinacemi a následnou exponenciací dokážeme získat rotaci libovolnou.

Maticovou exponenciálu (jakož i jinou maticovou funkci) lze definovat pomocí Taylorova rozvoje,

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n. \quad (2.7)$$

Platí tedy obvyklé vzorce

$$e^{\alpha \mathbf{A}} e^{\beta \mathbf{A}} = e^{(\alpha+\beta) \mathbf{A}} \quad \text{a} \quad \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha \mathbf{A}} = \mathbf{A} e^{\alpha \mathbf{A}} \quad (2.8)$$

a pokud dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ spolu komutují, tj. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, pak i $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$. Pokud jsou ovšem ve hře matice, které spolu nekomutují, jednoduchá analogie s číselnými exponenciálami neplatí. Obecně (viz Cvičení 7 a 8),

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \quad \text{a} \quad \frac{d}{d\alpha} e^{\mathbf{A}(\alpha)} \neq \frac{d\mathbf{A}(\alpha)}{d\alpha} e^{\mathbf{A}(\alpha)}. \quad (2.9)$$

(Zde $\mathbf{A}(\alpha)$ jsou matice parametrizované α , které spolu pro různé hodnoty α obecně nekomutují.)

Fakt, že exponenciála součtu matic se obecně nerovná součinu exponenciál, je i důvodem různých parametrizací rotací. Kromě parametrů $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ z rovnice (2.6) je často používána i parametrizace pomocí Eulerových úhlů, $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_3(\alpha) \mathbf{R}_2(\beta) \mathbf{R}_3(\gamma)$, která vyjadřuje libovolnou rotaci jako sekvenci rotací okolo pevně zadaných os. Naproti tomu ve vyjádření (2.6) jsou nejprve (lineárně) zkombinovány pevně zvolené generátory $\mathbf{M}_i$ podle zadaných charakteristik rotace (tj. osy a úhlu) a až poté se exponenciací vyrobí požadovaná konečná rotace.

Přejdeme nyní k relativistickým boostům a pro začátek uvažujme infinitesimální boost podél osy x rychlostí εc (zde máme na mysli aktivní transformaci při níž se nová čárkovaná soustava pohybuje rychlostí $-\varepsilon c$ vůči staré nečárkované a částice má tedy v nové soustavě rychlost o εc vyšší):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad x'^{\mu} \approx x^{\mu} - i\varepsilon (\mathbf{K}_1)^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{K}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Obdobným způsobem získáme i generátory boostů podél os y a z , $\mathbf{K}_2$ a $\mathbf{K}_3$. Všimněte se, že jsme do definice boostových generátorů $\mathbf{K}_i$ (poněkud uměle) přidali imaginární jednotku i , což

je běžná konvence kvantové teorie. V této konvenci pak mají generátory rotací (nyní již coby prostoročasové matice 4×4) blokový tvar

$$J_i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & iM_i \end{array} \right) \quad (2.11)$$

a obecnou Lorentzovu transformaci můžeme vyjádřit jako

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) = \exp(-i\theta^i J_i - i\zeta^i K_i), \quad (2.12)$$

kde $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ jsou přirozené parametry určující směr a velikost boostu. Směr je shodný se směrem rychlosti boostu, avšak velikost $\zeta = |\boldsymbol{\zeta}|$, tzv. **rapidita**, je svázána s velikostí boostové rychlosti $\mathbf{v}$ vztahem $\tanh \zeta = \beta \equiv \frac{v}{c}$ (viz Cvičení 9).

Lorentzovu transformaci můžeme obecně vyjádřit i jako součin rotace a boostu,

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}) = R(\tilde{\boldsymbol{\theta}})B(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}) = \exp(-i\tilde{\theta}^i J_i) \exp(-i\tilde{\zeta}^i K_i). \quad (2.13)$$

Zde je však třeba zdůraznit, že vztah mezi vlnkovanými a nevlnkovanými parametry je obecně netriviální vzhledem k vlastnosti maticových exponenciál (2.9) a vzájemné nekomutativnosti boostových a rotační generátorů.

2.2 Rozpad částic

Uvažujme nejprve rozpad nestabilní částice v její klidové soustavě. Značí-li λ pravděpodobnost rozpadu na jednotku času (tedy četnost rozpadu, angl. „decay rate”), pak $e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost, že se částice dožije času t (viz Cvičení 5). Pravděpodobnost rozpadu částice v intervalu $(t, t + dt)$ je

$$e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+dt)} \approx e^{-\lambda t}(1 - (1 - \lambda dt)) = \lambda e^{-\lambda t} dt. \quad (2.14)$$

Střední doba života je pak dána jako

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt = -\lambda \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = -\lambda \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad (2.15)$$

a poločas rozpadu $t_{1/2}$, definovaný jako čas, za který se částice rozpadne s pravděpodobností $1/2$, získáme jako

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (2.16)$$

Máme-li v čase $t = 0$ N_0 stejných nezávislých částic, pak počet nerozpadnutých částic v čase t je dán rozpadovým zákonem (viz Cvičení 5)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.17)$$

Ve fyzice mikrosvěta obvykle přecházíme od četnosti rozpadu λ k ekvivalentní veličině rozměru energie, tzv. **rozpadové šířce** (angl. „decay width”) $\Gamma = \hbar \lambda$. Rozpadem vzniká obecně n částic se čtyřhybnostmi $p_1, \dots, p_n$. Zákon zachování celkové čtyřhybnosti zaručuje, že

$$p_1 + \dots + p_n = p_A, \quad \text{kde } p_A = (m_A c, \mathbf{0}) \quad (2.18)$$

je čtyřhybnost rozpadající se částice v její klidové soustavě. Podrobnější informaci o koncových hybnostech poskytuje až zvolený model v rámci kvantové teorie, který umožňuje vypočítat hustotu pravděpodobnosti na prostoru tříhybností vyletujících částic (energie jednotlivých částic

jsou určené relací (2.1)). Tu označujeme jako $d\Gamma$ a nazýváme *diferenciální rozpadovou šířkou*. Její integraci přes všechny koncové stavy obdržíme (celkovou) rozpadovou šířku Γ .

Často se stává, že daná nestabilní částice se může rozpadat různými způsoby (tzv. *rozpadovými kanály*), tedy na různé počty a typy produktů. Celková rozpadová šířka je pak dána součtem rozpadových šířek jednotlivých kanálů, $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$, a významnost i -tého kanálu je kvantifikována poměrem Γ_i/Γ (tzv. „branching ration”).

Položme si ještě otázku, jakou vzdálenost uletí nestabilní částice letící rychlostí v v laboratorní soustavě. Její střední dobu života v klidové soustavě, jež je dána rovnicí (2.15) jako $\frac{1}{\lambda} = \frac{\hbar}{\Gamma}$, je třeba dilatovat relativistickým faktorem γ . Vzdálenost je pak dána jako

$$\ell = v\gamma \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (2.19)$$

2.3 Rozptyl částic

Srážkami částic se rozumí procesy, při nichž svazek nalétávajících částic (B) interaguje s částicemi terčíku (A). Přitom dochází buď k prostému rozptylu (odklonu nalétávajících částic) nebo ke srážce, při které může vznikat různé množství částic různých typů. Počet rozptylových událostí daného typu je úměrný společné ploše S , kterou svazek na terčíku vytne, hustotě částic ve svazku ρ_A , délce svazku ℓ_A , hustotě částic v terčíku ρ_B a tloušťce terčíku ℓ_B . Konstanta úměrnosti (která ovšem závisí na charakteristikách uvažované události) se nazývá **účinný průřez** σ . Máme tedy

$$\text{počet událostí} = \sigma S \rho_A \ell_A \rho_B \ell_B = \sigma \frac{N_A N_B}{S}, \quad \text{kde} \quad N_{A,B} = \rho_{A,B} \ell_{A,B} S \quad (2.20)$$

je počet částic v terčíku, resp. ve svazku. Účinný průřez má stejnou fyzikální jednotku jako plocha S , tedy m^2 . (V částicové fyzice se též často používá jednotka $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$ podle angl. „barn” — „stodola”).

Počet událostí vztažený na jednu terčíkovou částici a jednotku času udává

$$\text{četnost událostí} = \frac{\text{počet událostí}}{N_A T} = \sigma \frac{N_B}{ST} = \sigma \times (\text{hustota toku nalétávajících částic}). \quad (2.21)$$

Účinný průřez lze interpretovat jako efektivní průřez částice terčíku, vyjadřující míru pravděpodobnosti, že dojde k určité události. Událost většinou charakterizujeme nejen typem částic, které při ní vznikají, ale také jejich tříhybnostmi. (Energie jsou pak jednoznačně určeny relativistickým vztahem $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$.) Vzhledem k tomu, že se jedná o spojitě veličiny, účinný průřez se vztahuje k určité oblasti hybnostního prostoru $d^3 p_1 \dots d^3 p_n$ a mluvíme pak o **diferenciálním účinném průřezu** $d\sigma$.

Omezme se na případ rozptylu do dvou vyletujících částic se čtyřhybnostmi p_1 a p_2 (tzv. binární rozptyl). Zákon zachování celkové čtyřhybnosti omezuje 6 složek finálních tříhybností 4 vazbami. Zbývají tedy 2 parametry, za něž se obvykle berou úhly θ a φ tříhybnosti $\mathbf{p}_1$, a dostáváme se ke vztahu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{úhlová hustota toku vyletujících částic}}{\text{plošná hustota toku nalétávajících částic}}, \quad \text{kde} \quad d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.22)$$

je element prostorového úhlu. V těžištové soustavě je $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A$ a $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$. V kvantové teorii pole se v tomto případě ukazuje, že pravá strana je rovna výrazu $\frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_A|} |\mathcal{M}|^2$, kde $\mathcal{M}$ je relativisticky invariantní komplexní funkce počátečního a koncového stavu (tzv. *invariantní*

amplituda), která je základní předpovědí kvantověpolního modelu popisujícího mezičásticovou interakci. Veličina $s = (p_A + p_B)^2$ je jedním z tzv. *Mandelstamových invariantů* (viz Cvičení 11). Hodnota

$$\sqrt{s} = E_A + E_B \quad (2.23)$$

vyjadřuje celkovou energii v těžišťové soustavě.

2.4 Cvičení

Cvičení 6. *Rotace jako maticová exponenciála.*

Ukažte, že rotace kolem osy z daná maticovou exponenciálou $R_3(\theta) = \exp(\theta M_3)$ má známý tvar

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Řešení:

Podívejme se nejprve na první mocniny matice M_3 :

$$M_3^0 = I, \quad M_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Další mocniny už se opakují až na znaménko: $M_3^3 = -M_3$, $M_3^4 = -M_3^2$ až konečně $M_3^5 = M_3$ kde cyklus začíná znovu. Efektivně se tedy v Taylorově řadě pro $n > 0$ vyskytují jen dvě matice, které podle mocnin střídají znaménko.

Rozdělme tedy hledanou řadu na sudou a lichou část (nesmíme zapomenout $(\theta M_3)^0 = I$):

$$\exp(\theta M_3) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} (\theta M_3)^n = I + \sum_1^\infty \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} M_3^2 + \sum_0^\infty \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} M_3. \quad (2.26)$$

Explicitním rozepsáním tedy

$$\exp(\theta M_3) = \begin{pmatrix} \sum_0^\infty \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} & -\sum_0^\infty \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} & 0 \\ \sum_0^\infty \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_0^\infty \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

kde jsme rozeznali známé rozvoje goniometrických funkcí.

Cvičení 7. *Maticové exponenciály – faktorizace.*

Uvažujte matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

a spočtěte výrazy:

1. e^{A+B} ,
2. $e^A e^B$,
3. $[A, B] \equiv AB - BA$.

Řešení:

1. Označme $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vidíme, že $C^2 = I$, což znamená

$$e^{A+B} = \sum_0^\infty \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{I}{(2k)!} + \sum_0^\infty \frac{C}{(2k+1)!}. \quad (2.29)$$

V sumách poznáváme rozvoj hyperbolických funkcí, lze tedy psát

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

2. Zjevně $A^2 = 0 = B^2$, tedy

$$e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

dohromady

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

3. Platí

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

matice tedy nekomutují, pročez odlišnost výsledků 1. a 2. není překvapující.

Cvičení 8. *Maticové exponenciály – derivace.*

Uvažujte maticovou funkci

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

a spočtěte:

1. explicitní tvar matice $e^{A(\alpha)}$,
2. derivaci předchozího výsledku podle α ,
3. výraz $\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} e^{A(\alpha)}$,
4. komutátor $[A(\alpha_1), A(\alpha_2)]$.

Řešení:

1. Zjevně $[A(\alpha)]^2 = A(\alpha)$, proto

$$e^{A(\alpha)} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A(\alpha) = I + (e - 1)A(\alpha) = \begin{pmatrix} e & \alpha(e - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Alternativní postup: pro diagonalizovatelnou matici $A = PDP^{-1}$ lze psát

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = P(I + D + \frac{D^2}{2!} + \dots)P^{-1} = Pe^D P^{-1}, \quad (2.36)$$

stačí tedy exponencializovat diagonální matici D , která má na diagonále vlastní čísla matice A a obložit jí maticí P , složenou z jejích vlastních vektorů a její inverzí. V našem případě

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

(kde $\mathbf{P}^{-1}$ lze spočítat např. přes adjugovanou matici). Tedy z (2.36), protože $\mathbf{D}^n = \mathbf{D}$ pro $n > 0$):

$$e^{\mathbf{A}(\alpha)} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \alpha(e-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

což je skutečně stejný výsledek, jako (2.35).

2. Derivace předchozího výsledku:

$$\frac{d}{d\alpha} e^{\mathbf{A}(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & e-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

3. Vynásobením derivace matice $\mathbf{A}(\alpha)$ ze zadání a výsledku 1. dostáváme

$$\frac{d\mathbf{A}(\alpha)}{d\alpha} e^{\mathbf{A}(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & \alpha(e-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

4.

$$[\mathbf{A}(\alpha_1), \mathbf{A}(\alpha_2)] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 - \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

matice tedy nekomutují, odlišnost výsledků 2. a 3. tedy není překvapující.

Cvičení 9. Boost.

Lorentzovský boost podél osy x s rapiditou ζ je určen maticí $\exp \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}$.

1. Za pomoci Taylorova rozvoje nalezněte explicitní tvar maticové exponenciály.
2. Alternativně, definujte maticovou funkci $\mathbf{M}(\zeta) = \exp [\zeta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}]$, nalezněte diferenciální rovnici (druhého řádu), kterou splňuje, a tu vyřešte.
3. Porovnáním s tradičním tvarem Lorentzových transformací určete vztah mezi rapiditou ζ a rychlostí boostu v .
4. Složením dvou boostů s rapiditami ζ_1 a ζ_2 odvoďte vztah pro relativistické skládání rychlostí.

Řešení:

1. Matice jež máme exponencializovat je až na násobení ζ shodná s maticí $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ze Cvičení 7. Proto můžeme rovnou napsat

$$\exp \left[\begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta \\ \sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

2. Nejprve matici 2×2 zderivujeme:

$$\mathbf{M}(\zeta)'' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{M}(\zeta) \right]' = \mathbf{M}(\zeta), \quad (2.43)$$

máme tedy rovnice a obecné řešení po složkách

$$M_{ij}'' = M_{ij} \Rightarrow M_{ij}(\zeta) = A_{ij} \cosh \zeta + B_{ij} \sinh \zeta, \quad (2.44)$$

kde A_{ij} a B_{ij} jsou konstanty. Z počátečních podmínek

$$M_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad M'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

dostáváme požadovaný výsledek.

3. Standardní tvar matice boostu ve směru x je

$$B_x = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

tedy vztahy musí být

$$\cosh \zeta = \gamma, \quad \tanh \zeta = \beta \equiv \frac{v}{c}. \quad (2.47)$$

4. Vynásobením matic dvou boostů o rapiditách ζ_1 a ζ_2 a použitím součtových vzorců pro hyperbolické funkce dostáváme opět matici boostu s rapiditou $\zeta_1 + \zeta_2$. Protože i pro ni musí platit vztahy z výsledku 2., použitím identity pro $\tanh$ dostáváme požadované pravidlo skládání

$$\beta = \tanh(\zeta_1 + \zeta_2) = \frac{\tanh \zeta_1 + \tanh \zeta_2}{1 + \tanh \zeta_1 \tanh \zeta_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \quad (2.48)$$

Cvičení 10. *Relativistická částice v homogenním elektromagnetickém poli.*

Napište řešení relativistické Lorentzovy rovnice

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu \quad (2.49)$$

pro konstantní Faradayův tenzor $F_{\mu\nu}$.

Speciálně pak v nerelativistickém režimu zjednodušte pro případ $\mathbf{E} = (0, 0, 0)$ a $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

Řešení:

1. Zapišeme-li Lorentzovu rovnici maticově, máme $\dot{u} = \frac{q}{m} \mathbf{F}u$, kterou zjevně řeší maticová exponenciála

$$u(\tau) = \exp\left(\tau \frac{q}{m} \mathbf{F}\right). \quad (2.50)$$

Z teoremu o jednoznačnosti řešení je tento výsledek po určení počátečních podmínek unikátní.

2. Pro dané zadání máme Faradayův tenzor tvaru

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

(pozor na otočené znaménko vůči $F_{\mu\nu}$). Nyní potřebujeme explicitně spočítat exponencialu (2.50). Mocnění se ve skutečnosti zúčastní jen nenulový 2x2 blok uprostřed

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad T = \frac{\tau q B}{m}. \quad (2.52)$$

Jedná se o stejný blok jako ve Cvičení 6, označíme-li $\theta = -T$. Za využití sudosti cosinu a lichosti sinu tak můžeme rovnou napsat

$$\begin{pmatrix} u_0(\tau) \\ u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ u_3(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos T & \sin T & 0 \\ 0 & -\sin T & \cos T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} \\ u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{00} \\ u_{01} \cos T + u_{02} \sin T \\ -u_{01} \sin T + u_{02} \cos T \\ u_{03} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

První a druhý komponent lze vhodným použitím součtových vzorců zapsat jako $A \sin(\omega\tau + \varphi_1)$ resp. $A \cos(\omega\tau + \varphi_2)$. Po integraci bychom tak dostali pro nultý a třetí komponent x lineární tvar v τ , první a druhý komponent se chovají jako cosinus, resp. sinus. V nerelativistické limitě kdy $\tau \rightarrow t$ tak poznáváme šroubovici známou z ELMA a TEF.

Cvičení 11. Mandelstamovy invarianty.

Pro dvoučásticový rozptyl $A+B \rightarrow 1+2$ definujeme na základě zákona zachování čtyřhybnosti $p_A + p_B = p_1 + p_2$ lorentzovsky invariantní *Mandelstamovy invarianty*

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2 = (p_2 + p_1)^2, \\ t &= (p_A - p_1)^2 = (p_B - p_2)^2, \\ u &= (p_A - p_2)^2 = (p_B - p_1)^2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ukažte, že pro ně platí

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_1^2 + m_2^2. \quad (2.55)$$

Řešení:

Součet Mandelstamových proměnných můžeme zapsat např. jako

$$s + t + u = (p_A + p_B)^2 + (p_A - p_1)^2 + (p_A - p_2)^2. \quad (2.56)$$

Rozepíšeme kvadráty čtyřvektorů, přičemž pro využijeme invarianci kvadrátů čtyřhybností jednotlivých částic (pro každou jedenkrát). Ze zbytku můžeme vytknout $2p_A$ a využít zákon zachování čtyřhybnosti:

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2p_A(p_A + p_B - p_1 - p_2) = m_A^2 + m_B^2 + m_1^2 + m_2^2. \quad (2.57)$$

Cvičení 12. Rychlost částic na LHC.

1. Jakou rychlostí se pohybují protony na LHC, je-li celková energie dvou proti sobě letících částic v těžišťové soustavě 14 TeV?
2. Jak silné magnetické pole na částice působí, je-li poloměr urychlovače 4,3 km?

Řešení:

1. Celková energie v těžišťové soustavě je rovna

$$14 \text{ TeV} = \sqrt{s} = (p_A + p_B) = (E_A + E_B). \quad (2.58)$$

Jelikož se těžišťová soustava v tomto případě shoduje s laboratorní a jelikož obě částice jsou protony stejné klidové hmotnosti a velikosti rychlosti, energie jednoho z nich ($E_A = E_B \equiv$

E) je 7 TeV. Nyní už jen využijeme relativistický vztah pro energii a dosadíme klidovou hmotnost protonu $m = 938 \text{ MeV c}^{-2}$:

$$7 \text{ TeV} = E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad \frac{|\mathbf{v}|}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{m^2 c^4}{E^2} \doteq 1 - 10^{-8} \quad (2.59)$$

(kde jsme pro účely snadného „ručního výpočtu“ použili $m \doteq 10^9 \text{ eV c}^{-2}$ a $2 \cdot 49 \doteq 10^2$, což nám umožnilo řádový odhad. Skutečná hodnota odmocniny je $1 - 8,2044 \times 10^{-8}$). Rychlost je tedy velmi blízká rychlosti světla.

2. Máme situaci, kdy nabitě částice obíhají po stabilní kruhové dráze v konstantním homogenním magnetickém poli. Musí se tedy vyrovnat Lorentzova (magnetická) a dostředivá síla:

$$qB|\mathbf{v}| = \gamma m \frac{|\mathbf{v}|^2}{R} \Rightarrow \quad B = \frac{m|\mathbf{v}|}{qR\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}, \quad (2.60)$$

kde jsme použili fakt, že pohyb částice je kolmý na směr pole (B má stejný význam jako ve Cvičení 10) a provedli relativistickou korekci hmotnosti.

Figurující konstanty jsou poloměr $R = 4,3 \times 10^3 \text{ m}$ ze zadání, klidová hmotnost protonu $m = 938 \text{ MeV c}^{-2} = 1,6726 \times 10^{-27} \text{ Kg}$, jeho (elementární) náboj $q = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$, rychlost světla $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ a rychlost z části 1. Po vhodném zaokrouhlení dostáváme

$$B \doteq 3,8 \text{ Kg s}^{-1} \text{ C}^{-1} = 3,8 \text{ T}. \quad (2.61)$$

Poznámky:

Jeden proton má energii jako komár hmotnosti 2 mg letící rychlostí 1 m s^{-1} .

Kapitola 3

Klasická teorie pole

Představme si, že chceme popsat silové působení mezi dvěma částicemi (například skrze Coulombův potenciál mezi nabitými částicemi $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$). Speciální teorie relativity nám říká, že vliv jedné částice na druhou nemůže být bezprostřední, nýbrž že se může šířit maximálně rychlostí světla. Pokud částice 1 změní polohu, není možné, aby se tato skutečnost projevila okamžitou změnou síly působící na částici 2. Představa síly coby potenciálu mezi dvěma částicemi není slučitelná s principy speciální teorie relativity a je tak odkázána pouze do nerelativistického režimu, kde je rychlost světla nekonečná.

Aby bylo možné zachytit interakce částic v rámci teorie relativity, je třeba zavést zprostředkující (např. elektromagnetické) pole. Částice tak interagují primárně s polem a skrze něj se ovlivňují. Vypadá to tedy, jako bychom měli dva typy fyzikální reality — částice a pole. Kvantová teorie nicméně ukazuje, že částice jsou ve skutečnosti jakési kvantové excitace jím odpovídajících polí. Zjednodušeně řečeno, částice si můžeme představit jako vlnové balíky, jimž je přiřazena „rozmazaná“ poloha a hybnost (případně i polarizační stav).

Pro ilustraci uvažujme **Klein-Gordonovu vlnovou rovnici** a jí odpovídající disperzní vztah:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 \mathbf{k}^2, \quad \text{kde} \quad \omega_p \equiv \frac{mc^2}{\hbar}. \quad (3.1)$$

(Analogický disperzní vztah mají elektromagnetické vlny v plazmatu, kde ω_p označuje tzv. plazmovou frekvenci.) Z disperzního vztahu vyjádříme grupovou rychlost, tedy rychlost vlnových balíků, jako

$$v_g = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}|} = c^2 \frac{|\mathbf{k}|}{\omega} = c^2 \frac{|\mathbf{p}|}{E}, \quad (3.2)$$

kde jsme v posledním kroku přiřadili vlnovému balíku energii a hybnost podle de Broglieovy hypotézy: $E = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Disperzní vztah (3.1) pak přechází v relativistickou relaci $E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2$ a srovnání v rovnici

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} = \frac{\mathbf{p}}{E} c^2 \quad (3.3)$$

ukazuje, že v_g odpovídá rychlosti relativistické částice s energií E a klidovou hmotností m .

Přesný kvantitativní popis částic jako excitací polí a jejich vzájemných interakcí nicméně vyžaduje kvantovou teorii pole, jež je jazykem fundamentální částicové fyziky. Jedná se o poměrně náročnou, někdy dosti abstraktní, disciplínu a je proto předmětem až magisterského studia. V tomto kurzu se většinou omezíme na klasickou teorii pole, která je ovšem nezbytným předstupněm, a v rámci ní se seznámíme s plným popisem mikrosvěta na kvalitativní úrovni.

3.1 Lagrangeův formalismus teorie pole

Pole je funkce prostoročasového bodu $x = (ct, \mathbf{x})$ s hodnotami v reálných či komplexních číslech, případně s několika komponentami $\phi_r(x)$. Jeho dynamika je shrnuta v **lagrangiánu** (přesněji lagrangeovské hustotě) $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r, x)$. Ten tvoří **akci**, tj. integrální funkcionál

$$S[\phi_r(x)] = \int dt d^3x \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x), x) \quad (3.4)$$

definovaný na určité prostoročasové oblasti, jehož extremizací vůči variacím polí, které nemění pole na hranici této oblasti, získáme polní **Euler-Lagrangeovy pohybové rovnice**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} = 0 \quad (\forall r, x). \quad (3.5)$$

V klasické fyzice je nejprominentnějším příkladem pole pole elektromagnetické (popř. pole gravitační, pokud se zabýváme obecnou teorií relativity). V kvantové teorii, kde je i hmota popsána pomocí polí, se ovšem setkáváme s celou řadou dalších typů polí. V rovnici (3.1) jsme se setkali s jednokomponentním Klein-Gordonovým polem $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, což je nejjednodušší pole popisující relativistické částice. Dirac v roce 1928 tuto rovnici přepsal do tvaru

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(x) = - \left(i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \left(i \gamma^\nu \partial_\nu - \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi(x) = 0, \quad (3.6)$$

kde γ^μ jsou komplexní matice 4×4 splňující algebraické relace (viz Cvičení 13)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I} \quad (\forall \mu, \nu) \quad \text{a kde} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

je 4-komponentní komplexní funkce. To mu umožnilo postulovat **Diracovu rovnici**

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \Psi(x) = 0, \quad (3.8)$$

tedy svým způsobem „odmocnit” Klein-Gordonovu rovnici, která pak platí jednotlivě pro každou komponentu ψ_α . Dirac tedy zjednodušil diferenciální strukturu (snížil řád derivací) za cenu zesložitění algebraické struktury (přidal komponenty a zavedl γ -matice). Jeho rovnice se stala základní rovnicí relativistické kvantové mechaniky a jednou z nejvýznamnějších rovnic částicové fyziky vůbec.

Od teď budeme pro jednoduchost používat tzv. *přirozenou soustavu jednotek*, ve které pokládáme $\hbar = c = 1$ (a navíc i $\varepsilon_0 = 1$, z čehož plyne $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 1$). Toto je běžná praxe ve fyzice mikrosvěta. Konstanty $\hbar, c, \varepsilon_0$ je možné v rovnicích kdykoliv jednoznačně obnovit na základě rozměrové analýzy.

Základní charakteristikou polí je způsob, jakým se transformují při Lorentzových transformacích $x' = Lx$. Rozlišujeme

1. **skalární pole**: $\phi'_r(x') = \phi_r(x)$,
2. **spinorová pole**: $\Psi'(x') = S(L)\Psi(x)$,
3. **vektorová pole**: $A'^\mu(x') = L^\mu_\nu A^\nu(x)$,

popř. další typy polí (např. tenzorová pole), která ovšem nejsou fundamentálními poli standardního modelu. Zde matice $S(L)$, které při Lorentzových transformacích „míchají“ komponenty Diracova pole, tvoří tzv. spinorovou **reprezentaci Lorenzovy grupy** (jsou nesusingularní a splňují $S(L_1)S(L_2) = S(L_1L_2)$). Jejich konkrétní podoba plyne z požadavku lorentzovské invariance Diracovy rovnice (3.8) a je dána vztahem (2.12), kde místo generátorů J_i a K_i figurují jisté kombinace γ -matic.

Výše zmíněné typy polí se též označují jako: pole se spinem 0 (pro skalární pole), pole se spinem $1/2$ (pro spinorová pole) a pole se spinem 1 (pro vektorová pole). **Spin** je kvantová vlastnost částic, jakýsi vnitřní moment hybnosti. Odpovídající pole se spinem j má obecně $2j+1$ nezávislých polarizačních stavů. Hodnota j je určena sumou kvadrátů rotačních generátorů v příslušné reprezentaci. Například pro vektorová pole tak máme, podle rovnice (2.11),

$$\sum_{i=1}^3 (iM_i)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbb{I} = j(j+1)\mathbb{I} \quad \rightarrow \quad j = 1. \quad (3.9)$$

Pro skalární pole jsou všechny Lorentzovy transformace reprezentovány jednotkovou maticí a rotační generátory, a tedy i spin j , jsou nulové. Ve Cvičení 13 obdobným způsobem ověříme, že $j = 1/2$ pro spinorová pole (vzorec pro rotační generátory však odvozovat nebudeme).

V kvantové teorii pole se ukazuje, že částice se spinem $0, 1, 2, \dots$ jsou z hlediska statistiky **bosony** (tj. daný stav může zaujímat libovolný počet částic mnohočásticového systému), zatímco částice se spinem $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ jsou **fermiony** (tj. daný stav může zaujímat nanejvýš jedna částice daného typu). Elementární částice mají spin 0 (Higgsův boson) nebo $1/2$ (kvarky a leptony) anebo 1 (mediátoři interakcí). Vyššího spinu je možné dosáhnout složením elementárních konstituentů. Jeho výsledná hodnota pak závisí na detailech tohoto složení. Například proton a neutron mají spin $1/2$, existují ovšem i baryony (tedy tříkvarkové kompozity) se spinem $3/2$. Mezony (tedy dvoukvarkové kompozity) mohou mít spin 0 nebo 1.

Transformační vlastnosti vůči Lorentzovým transformacím určují typ pole (skalární, spinorové, vektorové — podle hodnoty spinu) a to i bez specifikace lagrangianu, tedy dynamiky pole. Požadavek lorentzovské invariance teorie nicméně klade značná omezení na možné tvary lagrangianů a setkááme se tedy typicky s následujícími případy:

1. (skalární) **Klein-Gordonovo pole**

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2, \quad (3.10)$$

2. (spinorové) **Diracovo pole**

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \quad \text{kde} \quad \bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (3.11)$$

3. (vektorové) **elektromagnetické pole**

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \text{kde} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.12)$$

(popř. hmotné vektorové pole, pokud ještě přidáme člen $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$).

Odpovídající Euler-Lagrangeovy rovnice pak reprodukuují známé pohybové rovnice: Klein-Gordonovu rovnici (3.1) pro Klein-Gordonův lagrangian $\mathcal{L}_{KG}$ (viz Cvičení 14), Diracovu rovnici (3.8) pro Diracův lagrangian $\mathcal{L}_D$ a Maxwellovy rovnice pro Maxwellův lagrangian $\mathcal{L}_{EM}$.

K Diracovu lagrangiánu je třeba poznamenat, že pole ψ_α a ψ_α^* jsou variována jako nezávislá, neboť je můžeme vnímat jako lineární kombinace $\psi_\alpha = \psi_\alpha^R + i\psi_\alpha^I$ a $\psi_\alpha^* = \psi_\alpha^R - i\psi_\alpha^I$ osmi nezávislých reálných polí ψ_α^R a ψ_α^I . (Tvar Euler-Lagrangeových rovnic je v proměnných $(\psi_\alpha, \psi_\alpha^*)$ stejný jako v proměnných $(\psi_\alpha^R, \psi_\alpha^I)$.) Variací podle ψ_α^* pak okamžitě dostáváme Diracovu rovnici a variací podle ψ_α pouze rovnici hermitovskky sdruženou.

3.2 Symetrie a zachovávající se veličiny

Lagrangián není jen nástroj k odvození pohybových rovnic, ale dokážeme z něj vyčíst i jiné užitečné informace o fyzikálním systému, aniž bychom přesně řešili celý časový vývoj. Na základě symetrií, tedy invariance lagrangiánu, resp. obecněji akce, vůči určitým spojitým transformacím prostoročasových a polních proměnných nám **teorém Noetherové** umožňuje identifikovat kombinace polí a derivací polí, které se v teorii zachovávají. Zatímco v klasické mechanice se pod pojmem „zachovávající se veličina“ rozumí veličina konstantní v čase, v teorii pole jsou zachovávajícími se veličinami noetherovské čtyřproudy j^μ splňující rovnici kontinuity a v čase se nemění až celkový integrovaný náboj:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 0, \quad \text{kde} \quad Q(t) = \int d^3x j^0(\mathbf{x}, t). \quad (3.13)$$

To jestli je daná transformace symetrií teorie závisí samozřejmě na lagrangiánu. Transformace se typicky dělí na vnitřní (interní) a prostoročasové. **Vnitřní transformace** je taková, která působí pouze v prostoru polí, na infinitesimální úrovni tedy $\phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$. Pokud je lagrangián invariantní, dostáváme s využitím Euler-Lagrangeových rovnic (3.5)

$$\mathcal{L}(\phi_r + \delta\phi_r, \partial_\mu\phi_r + \partial_\mu\delta\phi_r) - \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r) \approx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\partial_\mu\delta\phi_r = \partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r \right)}_{\propto j^\mu} = 0, \quad (3.14)$$

kde výraz v závorce představuje, po vydělení infinitesimálním parametrem (viz Cvičení 15), zachovávající se noetherovský proud. (Sumace přes r je implicitní, tj. rozšiřujeme Einsteinovu sumační konvenci i na indexy v interním polním prostoru.)

Prostoročasové transformace mění souřadnice x^μ . Pokud je teorie lorentzovsky invariantní, implikuje teorém Noetherové zachování polního *tenzoru momentu hybnosti*, což je poměrně komplikovaná, i když užitečná veličina. Ještě významnější zachovávající se veličinu dostaneme, pokud lagrangián nezávisí explicitně na x , tj. pokud je teorie translačně invariantní. To je běžný požadavek fundamentálních teorií, kde všechna pole jsou dynamická, tedy na systém nepůsobí externí pole. V tomto případě

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0, \quad \text{kde} \quad T^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\partial_\nu\phi_r - \delta^\mu_\nu\mathcal{L} \quad (3.15)$$

je kanonický **tenzor energie-hybnosti**. Jeho složka $T^0_0 \equiv \mathcal{H}$ představuje hustotu energie pole a integrací přes prostor pak dostáváme celkovou energii pole, neboli *polní hamiltonián*

$$H = \int d^3x (\pi_r \partial_t \phi_r - \mathcal{L}), \quad \text{kde} \quad \pi_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi_r)} \quad (3.16)$$

je kanonické hybnostní pole.

3.3 Cvičení

Cvičení 13. *Algebraické relace γ -matic.*

Definujme matice (tzv. Diracovy matice v chirální reprezentaci)

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

a $\bar{\sigma}^\mu = \sigma_\mu$. (Matice σ^i se nazývají Pauliho matice.)

1. Ukažte, že $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}$.
2. Čemu se rovná výraz $\Sigma^i \equiv \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \gamma^j \gamma^k$? (Σ^i jsou generátory rotací ve spinorové reprezentaci.)
3. Ukažte, že $\frac{\Sigma^i}{2} \frac{\Sigma^i}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \mathbb{I}$, což odpovídá spinu $j = \frac{1}{2}$.

Řešení:

1. Důkaz je přímý, rozepíšeme

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Z definice $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0$ a $\bar{\sigma}^i = -\sigma^i$, což mimo jiné znamená že oba nenulové bloky (3.18) jsou shodné. Dále je třeba explicitně propočítat součiny; výsledky se dají shrnout vztahy

$$\sigma^i \sigma^j = i\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma^k, \quad \sigma^0 \sigma^\mu = \sigma^\mu \sigma^0 = \sigma^\mu, \quad (3.19)$$

což po dosazení souhlasí s hledaným výsledkem.

2. Máme např.

$$\Sigma^i = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^2 \bar{\sigma}^3 - \sigma^3 \bar{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^2 \sigma^3 - \bar{\sigma}^3 \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

kde první rovnost plyne z definice, druhá využitím (3.19) a explicitním výpočtem. Analogickým postupem pro ostatní složky celkově dostáváme

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

3. Explicitně

$$\frac{\Sigma^i}{2} \frac{\Sigma^i}{2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \sigma^i \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \mathbb{I} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \mathbb{I}, \quad (3.22)$$

kde přes i se ve všech případech sčítá, předposlední rovnost plyne z (3.19).

Cvičení 14. *Klein-Gordonova rovnice z lagrangiánu.* Uvažujte lagrangián

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.23)$$

a odvoďte:

1. polní Euler-Lagrangeovy pohybové rovnice,
2. celkový polní hamiltonián H .

Řešení:

1. Přepíšeme lagrangián jako $\mathcal{L} = g^{\nu\mu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$, z čehož můžeme spočít derivace a Euler-Lagrangeovy rovnice jako

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} = \partial^\alpha\phi \Rightarrow \quad 0 = -m^2\phi - \partial_\alpha\partial^\alpha\phi = -(m^2 + \square)\phi. \quad (3.24)$$

2. Platí $\pi := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial^0\phi$. Pak tedy pro $\mathcal{H} := [(\partial^0\phi)(\partial_0\phi) - \mathcal{L}]$ máme

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\partial^i\phi)(\partial_i\phi) = \frac{1}{2}(m^2\phi^2 + \pi^2 + (\nabla\phi)^2). \quad (3.25)$$

Cvičení 15. *Noetherovský proud Klein-Gordonova pole.* Uvažujte lagrangián komplexního Klein-Gordonova pole

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi. \quad (3.26)$$

1. Ukažte, že $\mathcal{L}$ je invariantní vůči transformaci $\varphi'(x) = e^{-i\lambda}\varphi(x)$ a odvoďte příslušný noetherovský proud.
2. Nalezněte řešení pohybové rovnice ve formě rovinných vln a určete, které rovinné vlny mají kladnou, resp. zápornou, hodnotu noetherovského náboje.

Řešení:

1. Zjevně

$$\mathcal{L}' = (\partial_\mu\varphi^*e^{i\lambda})(\partial^\mu\varphi e^{-i\lambda}) - m^2\varphi^*e^{i\lambda}\varphi e^{-i\lambda} = \mathcal{L}. \quad (3.27)$$

Infinitesimalně je

$$\varphi'(x) = e^{-i\lambda}\varphi(x) \approx \varphi(x) - i\lambda\varphi(x), \quad \varphi^{*\prime}(x) = e^{i\lambda}\varphi^*(x) \approx \varphi^*(x) + i\lambda\varphi^*(x) \quad (3.28)$$

a tedy složky Noetherovského proudu (3.14) jsou

$$j^\mu = i(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*). \quad (3.29)$$

2. Použijeme ansatz tvaru planární vlny $\varphi = Ae^{-ipx}$, což po dosazení do pohybových rovnic (analogicky Cvičení 14) dává

$$0 = |A|^2[p^2 - m^2], \quad (3.30)$$

tedy p musí skutečně být čtyřhybnost. Dosazení do vztahu pro náboj (3.13) dává

$$Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x 2|A|^2 p^0, \quad (3.31)$$

tedy jeho znaménko je dáno znaménkem $p^0 = E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$.

Cvičení 16. *Pohybové rovnice Proca pole.* Uvažujte lagrangián hmotného vektorového pole

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad \text{kde} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.32)$$

Odvoďte Euler-Lagrangeovy rovnice a ukažte, že je lze zjednodušit na tvar $(\square + m^2)A^\nu = 0$.

Řešení:

Přepíšeme lagrangián jako

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \frac{1}{2}m^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu, \quad (3.33)$$

z čehož plynou derivace a Euler-Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\xi} = m^2 A^\xi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\xi)} = -F^{\lambda\xi} \Rightarrow \quad m^2 A^\xi + \partial_\lambda F^{\lambda\xi} = 0. \quad (3.34)$$

Zapůsobením ∂_ξ na rovnici (3.34) pro $m \neq 0$ dostáváme $\partial_\xi A^\xi = 0$ a tedy původní rovnice lze zapsat jako

$$(m^2 + \square)A^\xi = 0, \quad (3.35)$$

tj. jako Klein-Gordonovu rovnici pro každou složku čtyřpotenciálu.

Cvičení 17. *Elasticita v Lagrangeově formalismu.*

Uvažujte nekonečnou kubickou mřížku s mřížkovou konstantou a , v jejíž vrcholech se nacházejí závaží (atomy) hmotnosti M spojená pružinkami (meziatomovými silami) s tuhostí k a klidovou délkou a . Označme $\mathbf{u}(\mathbf{R}) \in \mathbb{R}^3$ výchylky z rovnovážných poloh $\mathbf{R} = a\mathbf{n}$, kde $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$.

1. V přiblížení malých kmitů napište Lagrangeovu funkci systému a ukažte, že ve spojitě limitě (kdy efektivně $a \rightarrow 0$) má tvar

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad \text{kde} \quad \mathcal{L} = \frac{\rho}{2}(\partial_t \mathbf{u})^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial_i u_i)^2. \quad (3.36)$$

2. Odvoďte Euler-Lagrangeovy rovnice a určete typ jejich vlnových řešení (podélné nebo příčné).
3. Určete hustotu a tok energie a ukažte, že odpovídající rovnici kontinuity lze zjednodušit na tvar

$$(\partial_t u_i)(\rho \partial_i^2 u_i - \lambda \partial_i(\partial_j u_j)) = 0. \quad (3.37)$$

Řešení:

V tomto příkladu budeme psát indexy prostorových vektorů dole, jak je zvykem v nerelativistické teorii elasticity.

1. Lagrangián systému je dán jako rozdíl kinetické a potenciální energie,

$$L = \sum_{\mathbf{R}} \frac{M}{2} \dot{\mathbf{u}}^2(\mathbf{R}) - \sum_{\mathbf{R}} \sum_{\mathbf{a}} \frac{k}{2} \left(|\mathbf{u}(\mathbf{R} + \mathbf{a}) - \mathbf{u}(\mathbf{R}) + \mathbf{a}| - a \right)^2, \quad (3.38)$$

kde vnitřní sumace probíhá přes $\mathbf{a} \in \{(a, 0, 0), (0, a, 0), (0, 0, a)\}$. V přiblížení malých kmitů rozvíjíme potenciální část do druhého řádu v $\mathbf{u}(\mathbf{R})$. Označíme $\Delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{R} + \mathbf{a}) - \mathbf{u}(\mathbf{R})$ a postupně dostáváme

$$|\Delta \mathbf{u} + \mathbf{a}| = a \left(1 + 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{u}}{a^2} + \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{a^2} \right)^{1/2} \approx a + \frac{\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{u}}{a} + \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{2a} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{u})^2}{2a^3}, \quad (3.39)$$

kde jsme využili Taylorův rozvoj $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$, a

$$(|\Delta \mathbf{u} + \mathbf{a}| - a)^2 \approx \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{u}}{a} \right)^2. \quad (3.40)$$

Ve spojitě limitě se z $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ stává funkce (pole výchylek) $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ a máme $\sum_{\mathbf{R}} \rightarrow \int \frac{d^3x}{a^3}$ a $\frac{\Delta \mathbf{u}}{a} \rightarrow a_i \partial_i \mathbf{u}$. Dostáváme tedy polní lagrangian

$$L = \int d^3x \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{u}}^2 - \int d^3x \frac{\lambda}{2} (\partial_i u_i)^2, \quad (3.41)$$

kde $\rho = \frac{M}{a^3}$ je hustota a $\lambda = \frac{k}{a}$ Lamého koeficient.

2. Polní Euler-Lagrangeovy rovnice jsou dány jako

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u_i)} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j u_i)} = 0, \quad (3.42)$$

což pro lagrangeovskou hustotu (3.36) vede na

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u_i)} = \rho \partial_t u_i \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j u_i)} = -\lambda \delta_{ij} (\partial_k u_k) \quad \rightarrow \quad \rho \partial_t^2 u_i - \lambda \partial_i (\partial_j u_j) = 0. \quad (3.43)$$

Řešení pohybových rovnic hledáme ve tvaru rovinných monochromatických vln $u_i = A_i e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$, jejichž dosazení vede na disperzní vztah

$$A_i \omega^2 = \frac{\lambda}{\rho} (A_j k_j) k_i \quad \text{a z něj plynoucí} \quad \omega^2 = \frac{\lambda}{\rho} \mathbf{k}^2. \quad (3.44)$$

Vidíme, že vektor amplitudy vlny A_i je úměrný směru šíření k_i a jedná se tedy o podélné vlnění, jehož rychlost se rovná $\sqrt{\lambda/\rho}$.

3. Hustota energie resp. jejího toku tvoří nultý sloupec tenzoru energie-hybnosti (3.15):

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u_i)} \partial_t u_i - \mathcal{L} = \frac{\rho}{2} (\partial_t \mathbf{u})^2 + \frac{\lambda}{2} (\partial_i u_i)^2 \\ T^j_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j u_i)} \partial_t u_i = -\lambda (\partial_k u_k) (\partial_t u_j) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Rovnice kontinuity energie má tvar

$$\begin{aligned} \partial_t T^0_0 + \partial_j T^j_0 &= \rho (\partial_t u_i) (\partial_t^2 u_i) + \lambda (\partial_i u_i) \partial_j (\partial_t u_j) - \lambda \partial_j (\partial_k u_k) (\partial_t u_j) - \lambda (\partial_k u_k) \partial_j (\partial_t u_j) \\ &= (\partial_t u_i) (\rho (\partial_t^2 u_i) - \lambda \partial_i (\partial_k u_k)) = 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

jenž je, podle očekávání, kompatibilní s pohybovou rovnicí (3.43).

Kapitola 4

Elektrodynamika a kvantování polí

Často je užitečné si pod pojmem pole představit spojitou limitu mechanického systému s mnoha stupni volnosti (tak například dostaneme strunu jako zespojitění řetízku vázaných oscilátorů). Z této mechanické analogie je pak zřejmé, že pokud známe hamiltonián, můžeme z klasické teorie pole udělat kvantovou stejně jako přecházíme z klasické mechaniky k mechanice kvantové, tedy reprezentovat kanonická pole a hybnosti pomocí operátorů, zavést vlnovou funkci systému a postulovat Schrödingerovu rovnici s hamiltonovským operátorem $\hat{H}$ odvozeným z klasického hamiltoniánu (3.16). Tento proces se nazývá **kanonické kvantování**.

Modernější způsob kvantování využívá tzv. **Feynmanova dráhového integrálu**, který je formulován v jazyce lagrangiánu a akce. Jedná se o nekonečněnásobný integrál přes prostor všech prostoročasových polních konfigurací $\phi(x)$, kde každé konfiguraci je přiřazena fáze $\exp(\frac{i}{\hbar} S[\phi])$. Chceme-li kvantovat, a dobrat se tak správného kvantitativního popisu fyziky mikrosvěta, máme tedy na výběr mezi nekonečněnásobným Feynmanovým integrálem a systémem nekonečně mnoha kanonických kvantových operátorů $\hat{\phi}(x)$ definovaných v každém bodě prostoru. Přestože se v tomto kurzu, jak již bylo řečeno, otázkou kvantování polí systematicky zabývat nebudeme, je dobré mít na paměti, že kvantování je možné formulovat v jazyce lagrangiánu skrze dráhový integrál a v dalším proto budeme využívat výhradně lagrangeovský popis klasické teorie pole.

Dynamika pole, coby systému s nekonečně mnoha stupni volnosti, je obecně těžko řešitelný problém. Podobně jako v případě systému vázaných oscilátorů se situace zásadně zjednoduší, pokud je lagrangián nanejvýš kvadratickou funkcí polí a jejich derivací (viz například lagrangiány (3.10), (3.11) a (3.12)). V takovém případě jsou pohybové rovnice lineární a je možné použít metodu rozkladu do módů, normálních souřadnic a vlastních frekvencí. Pole se v tomto případě nazývají *volná*. Pro popis **interakcí mezi poli** (a tím pádem i mezi odpovídajícími částicemi) je zapotřebí zavést do lagrangiánu monomy vyššího řádu (kubické, kvartické, ...), které mají za následek nelinearitu pohybových rovnic. V takovém případě se nebudou vlnové balíky míjet „bez povšimnutí“, ale budou se navzájem ovlivňovat — rozptylovat se, rozpadat se, měnit svůj typ (tak jako elementární částice).

Významným příkladem interagující polní teorie je **elektrodynamika**, jež se zabývá pohybem nabitých částic v elektromagnetickém poli a zároveň dynamikou pole, které je těmito částicemi buzeno. Samotné elektromagnetické pole je popsáno lagrangiánem $\mathcal{L}_{EM}$, rovnice (3.12). Nabité částice mají typicky spin 1/2 (např. elektron či proton) a jsou tedy popsány Diracovým polem s

lagrangiánem $\mathcal{L}_D$, rovnice (3.11). Jejich prostým součtem bychom dostali lagrangián

$$\mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_D = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \quad (4.1)$$

který popisuje jak elektromagnetické pole tak hmotu, avšak pouze jako neinteragující, nezávislá pole. (Euler-Lagrangeovy rovnice vzniklé variací podle elektromagnetického pole A_μ neobsahují hmotové pole Ψ a naopak v hmotových pohybových rovnicích nevystupuje A_μ .)

K zavedení interakce slouží jednoduché pravidlo nazývané **minimální vazba** (angl. „minimal coupling“). (To vypadá poněkud uměle, avšak v kapitole 6 si je osvětlíme a ukážeme, že platí i v obecnějších Yang-Millových kalibračních teoriích, které jsou jedním ze základních stavebních kamenů standardního modelu mikrosvěta.) Parciální derivace ∂_μ v Diracově části lagrangiánu se nahradí tzv. **kovariantní derivací** $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$, kde q je náboj částic a $A_\mu(x)$ je operátorem ve smyslu násobení funkcí. Obdržíme tak lagrangián (kvantové) elektrodynamiky, nebo též Maxwell-Diracův lagrangián,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{EM}} + \underbrace{\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi}_{\mathcal{L}_D} + \underbrace{-q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu}_{\mathcal{L}_I}. \quad (4.2)$$

Zde jsme vyznačili interakční část lagrangiánu, $\mathcal{L}_I$, která je kubická v polích. Zbytek lagrangiánu je kvadratická, tedy volná část.

Pohybové rovnice vyplývající z lagrangiánu $\mathcal{L}$ není obtížné určit, pamatujeme-li si pohybové rovnice odpovídající jednotlivým volným částem $\mathcal{L}_{EM}$ (Maxwellovy rovnice) a $\mathcal{L}_D$ (Diracova rovnice). Dostáváme

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{\partial\mathcal{L}_I}{\partial A_\nu} + \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_I}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \quad \rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = q\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi, \quad (4.3)$$

respektive

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0. \quad (4.4)$$

Rovnice (4.3) jsou Maxwellovy rovnice, v nichž veličina $j^\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ vystupuje v roli elektrického čtyřproudu (tzv. *Diracův proud*). Ve Cvičení 19 si ukážeme, že j^μ je noetherovský proud odpovídající symetrii

$$\Psi'(x) = e^{-i\lambda}\Psi(x) \quad , \quad \bar{\Psi}'(x) = e^{i\lambda}\bar{\Psi}(x) \quad (4.5)$$

a je tedy zachovávaná se veličinou. (Druhý z transformačních vztahů je pouze sdružením prvního.) Rovnice (4.4) je evoluční rovnicí Diracova pole (tedy hmoty), na něž působí elektromagnetické síly, zde reprezentované čtyřpotenciálem A_μ . Hraje tedy obdobnou roli jako Lorentzova rovnice. Diracův proud tedy budí elektromagnetické pole a to naopak říká, jak se mají částice Diracova pole pohybovat. Síla vzájemného ovlivňování polí je určena jejich vazbovou konstantou, v tomto případě hodnotou elektrického náboje q (například náboj elektronu).

Kvantová elektrodynamika pozoruhodným způsobem sjednocuje popis elektromagnetického záření a hmoty. V prvním případě ustupuje od čistě vlnového charakteru světla a vnímá jej jako soustavu fotonů, tedy kvantových excitací elektromagnetického pole. V druhém případě nahrazuje čistě částicovou představu hmoty polem, jehož kvantové excitace mají jistý částicový charakter. V obou případech se jedná o kvantové pole (vektorového resp. spinorového typu).

Kvantování pole v praxi znamená, že vlna určité frekvence ω může měnit svou energii (a tedy i amplitudu) pouze diskretním skokem velikosti $\hbar\omega$, což je elementární kvantum energie. Tato úvaha vedla už v roce 1900 k Planckovu zákonu vyzařování černého tělesa a o pět let později k Einsteinovu vysvětlení fotoelektrického jevu, což jsou počátky kvantové teorie.

Kvantum energie se interpretuje jako částice. Přidávání resp. odebrání kvant energie pole odpovídá kreaci resp. anihilaci částic. Energie se navíc může mezi různými typy polí přelévat a částice tak mohou měnit svoji identitu, ovšem za určitých jasně daných podmínek. Například foton o dostatečně vysoké energii se může v přítomnosti atomového jádra změnit na pár elektron–pozitron (viz Cvičení 20) a tento pár může naopak anihilovat a změnit se na pár fotonů. Celkový elektrický náboj se v těchto procesech nemění, což je v souladu s tím, že $Q = \int d^3x j^0$ je zachovávanou veličinou pro systém popsaný lagrangianem (4.2).

Kvantová elektrodynamika získala svou finální (současnou) podobu až v 50tých letech 20. století díky pracem Tomonagy, Schwingera, Feynmana a Dysona. Stala se vzorem pro pozdější kvantové polní teorie elektroslabých a silných interakcí a její předpovědi se ukázaly být ve vynikající shodě s experimenty. Například hodnota tzv. *anomálního magnetického momentu elektronu* je experimentálně ověřena na 9 platných číslic, což je nejpřesnější fyzikální výsledek vůbec.

4.1 Cvičení

Cvičení 18. *Faradayův tenzor jako komutátor kovariantních derivací.*

Ukažte, že pro operátory kovariantní derivace $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ platí

$$[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = iqF_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Řešení:

Komutátor necháme působit na testovací funkci ψ

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu \psi + iqA_\nu \psi) - (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi). \quad (4.7)$$

Po rozepsání a použití pravidla pro derivace součinu se přebytečné členy odečtou a zbude pouze $iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi$, což odpovídá výsledku ze zadání.

Cvičení 19. *Diracův proud z teoremu Noetherové.*

Ukažte, že Diracův lagrangián $\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$ je invariantní vůči vnitřní transformaci $\Psi'(x) = e^{-i\lambda}\Psi(x)$ a odvoďte tvar odpovídajícího noetherovského proudu.

Řešení:

Při použití $\Psi'(x) = e^{-i\lambda}\Psi(x)$ a $\bar{\Psi}'(x) = e^{i\lambda}\bar{\Psi}(x)$ dostáváme

$$\mathcal{L}' = e^{i\lambda}\bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{-i\lambda}\Psi(x) = \mathcal{L}. \quad (4.8)$$

Infinitesimální verze transformací je

$$\Psi'(x) \approx \Psi(x) - i\lambda\Psi(x), \quad \bar{\Psi}'(x) \approx \bar{\Psi}(x) + i\lambda\bar{\Psi}(x) \quad (4.9)$$

a tedy proud má tvar

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (4.10)$$

Cvičení 20. *Vznik páru elektron–pozitron z fotonu.*

Uvažujte proces vzniku páru elektron–pozitron z fotonu za přítomnosti jádra o hmotnosti M a s protonovým číslem Z ,

$$\gamma + Z \rightarrow e^- + e^+ + Z. \quad (4.11)$$

Určete maximální vlnovou délku fotonu λ_{max} , při které může k tomuto procesu dojít.

Řešení:

Zákon zachování celkové čtyřhybnosti má tvar

$$k + P = p^- + p^+ + P', \quad (4.12)$$

kde P a P' jsou čtyřhybnosti jádra před srážkou a po srážce, k je čtyřhybnost fotonu a p^- a p^+ označují čtyřhybnosti elektronu a pozitronu.

Uvažujme klidovou soustavu jádra před srážkou, v níž $P = (M, \mathbf{0})$ a snadno tak vyjádříme invariant

$$s = (k + P)^2 = 2k_0M + M^2. \quad (4.13)$$

Po srážce budeme mít v těžiškové soustavě (kde součet tříhybností $\mathbf{p}^- + \mathbf{p}^+ + \mathbf{P}' = \mathbf{0}$)

$$s = (p^- + p^+ + P')^2 = (p_0^- + p_0^+ + P'_0)^2, \quad (4.14)$$

což je minimální, pokud jsou částice v této soustavě nehybné, tj. $\mathbf{p}^- = \mathbf{p}^+ = \mathbf{P}' = \mathbf{0}$. Potom

$$s_{min} = (m_e + m_e + M)^2 = 4m_e^2 + 4m_eM + M^2 \quad (4.15)$$

a porovnáním s rovnicí (4.13) můžeme vyjádřit

$$k_0^{min} = 2m_e \left(1 + \frac{m_e}{M}\right). \quad (4.16)$$

Minimální energie fotonu v jednotkách SI (tj. včetně příslušných mocnin $\hbar$ a c) je

$$E_\gamma^{min} = k_0^{min}c = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{M}\right). \quad (4.17)$$

Maximální vlnová délka fotonu je tedy

$$\lambda_{max} = \frac{c}{\nu_{min}} = \frac{hc}{E_\gamma^{min}} \approx \frac{\pi\hbar}{m_e c} \doteq 1,2 \times 10^{-12} \text{ m}, \quad (4.18)$$

což je zhruba o 5 řádů méně než u viditelného světla.

Poznámky:

Pro hmotnost jádra $M \rightarrow 0$ energie fotonu diverguje. Pokud jádro není přítomné vůbec, není možné pár elektron–pozitron z jednoho fotonu vytvořit. Nahradíme-li jádro nenabitou hmotou, bude sice tvorba páru kinematicky možná, ale účinný průřez (tj. pravděpodobnost) tohoto procesu bude nulový.

Kapitola 5

Lieovy grupy a algebry

V kapitole 2 jsme si na příkladu prostorových rotací (a posléze i obecných Lorentzových transformací) ukázali, jak je výhodné používat generátory spojitých transformací. S jejich pomocí můžeme studovat transformace na infinitesimální úrovni a konečné transformace získat exponenciací lineárních kombinací generátorů. Jelikož spojitě transformace se uplatňují nejen jako transformace prostoročasu, ale i ve vnitřním prostoru, kde transformují komponenty polí, vyplátí se říci si o nich něco obecně.

Množinu transformací G nazýváme **Lieovou grupou**, pokud

1. je grupou, tj.: transformace můžeme skládat ($g_1 g_2 \in G$), v G máme jednotkovou transformaci e a každému prvku g prvek inverzní g^{-1} ;
2. je zároveň hladkou varietou, tj. je (alespoň lokálně) hladce parametrizovatelná konečným počtem parametrů.

Přestože je možné teorii Lieových grup budovat abstraktněji, my se pro názornost omezíme na maticové Lieovy grupy, tedy množiny regulárních matic uzavřené vůči maticovému násobení a obsahující jednotkovou matici, $e = \mathbb{I}$. Typicky jsou zadány pomocí vazeb jako podvariety nějakého $GL(N, \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C})$, tj. množiny regulárních matic $N \times N$. Například rotační grupa $SO(3)$ je definována podmínkami

$$\begin{aligned} 1) \quad & \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{I} \quad (\text{ortogonalita transformací}), \\ 2) \quad & \det \mathbf{R} = 1 \quad (\text{nemění orientaci báze}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Blízko jednotky se nacházejí infinitesimální transformace $g \approx \mathbb{I} + \varepsilon \mathbf{X}$. V jazyce diferenciální geometrie jsou generátory $\mathbf{X}$ tečnými vektory k varietě G v bodě $e = \mathbb{I}$. Množinu generátorů, tedy tečný prostor $T_e G$, nazýváme **Lieovou algebrou** (příslušející k Lieově grupě G). Dimenze Lieovy algebry je shodná s dimenzí Lieovy grupy, ovšem Lieova algebra je vektorovým prostorem, zatímco Lieova grupa obecnou (nelineární) varietou. Síla teorie Lieových grup a algeber spočívá v tom, že analýzu grupy převádí na analýzu odpovídající algebry, ze které je pak možné grupu zrekonstruovat pomocí exponenciálního zobrazení $\mathbf{X} \mapsto e^{\mathbf{X}} \in G$. (To je surjektivní, pokud je grupa souvislá a kompaktní.)

Vazbové podmínky Lieovy grupy určují i podmínky, které musí splňovat prvky Lieovy algebry. Vezměme jako příklad opět rotační grupu $SO(3)$, jejíž vazbové podmínky (5.1) na infinitesimální

úrovni implikují

$$\begin{aligned} 1) (\mathbb{I} + \varepsilon \mathbf{M})^T (\mathbb{I} + \varepsilon \mathbf{M}) &\approx \mathbb{I} + \varepsilon (\mathbf{M}^T + \mathbf{M}) \stackrel{!}{=} \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^T = -\mathbf{M}, \\ 2) \det(\mathbb{I} + \varepsilon \mathbf{M}) &= (1 + \varepsilon M_1^1)(1 + \varepsilon M_2^2)(1 + \varepsilon M_3^3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \approx 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} \mathbf{M} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} \mathbf{M} = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Příslušná Lieova algebra, označovaná jako $\mathfrak{so}(3)$, je tedy tvořena reálnými antisymetrickými maticemi 3×3 s nulovou stopou. (Druhá podmínka v tomto případě automaticky plyne z první, neboť ortogonální matice mají determinant ± 1 a ty, které jsou blízko jednotky, musí mít tedy determinant $+1$.) Takové matice jsou 3 lineárně nezávislé a můžeme je vybrat například jako rotační generátory $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}_3$ z kapitoly 2, rovnice (2.5).

Jak již slovo „algebra“ napovídá, Lieova algebra není jen pouhým vektorovým prostorem, ale existuje na ní ještě přirozená součinná operace, kterou je **komutátor** matic $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$. Ukažme, že $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ je skutečně prvkem Lieovy algebry. Pro infinitesimální transformaci $\mathbb{I} + \varepsilon \mathbf{X}$ je transformace

$$e^{-\lambda \mathbf{Y}} (\mathbb{I} + \varepsilon \mathbf{X}) e^{\lambda \mathbf{Y}} = \mathbb{I} + \varepsilon (e^{-\lambda \mathbf{Y}} \mathbf{X} e^{\lambda \mathbf{Y}}) \quad (5.3)$$

rovněž infinitesimální transformací, jejíž generátor $e^{-\lambda \mathbf{Y}} \mathbf{X} e^{\lambda \mathbf{Y}}$ tedy leží v Lieově algebře ($\forall \lambda$). Jelikož se jedná o lineární prostor, bude v Lieově algebře ležet i

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} (e^{-\lambda \mathbf{Y}} \mathbf{X} e^{\lambda \mathbf{Y}}) = -\mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]. \quad (5.4)$$

Dimenze Lieovy algebry je počet lineárně nezávislých generátorů. Ten obecně nijak nesouvisí s velikostí matic, tedy dimenzí prostoru, na kterém tyto matice působí jako lineární zobrazení. (Rotace na N -rozměrném prostoru mají $\frac{N}{2}(N-1)$ generátorů, což odpovídá počtu antisymetrických matic $N \times N$.) Bazické generátory $\mathbf{X}_a$ (pro jejichž číslování budeme používat indexy $a, b, c, \dots$) můžeme v principu volit libovolně. Často však existují určité standardní rozumné volby jako například generátory rotací kolem vzájemně kolmých kartézských os $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$. Komutátor dvou bazických generátorů leží v Lieově algebře a je tedy možné jej zapsat jako lineární kombinaci

$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = f_{abc} \mathbf{X}_c \quad (\text{resp.} \quad [\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] = i f_{abc} \mathbf{T}_c \quad \text{pro} \quad \mathbf{T}_a = i \mathbf{X}_a), \quad (5.5)$$

kde čísla f_{abc} se nazývají **strukturními konstantami** dané algebry. (Opět aplikujeme Einsteinovu sumační konvenci.) Právě komutační relace (5.5) jsou charakteristickým rysem Lieovy algebry (a potažmo grupy — díky exponenciálnímu zobrazení), tím, co od sebe odlišuje algebry stejné dimenze jako například prostorové translace a rotace. Translace spolu komutují, jejich strukturní konstanty jsou tedy identicky rovny nule, zatímco rotace mají $f_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ (viz Cvičení 21). (Zde jsme použili indexy $i, \dots$ namísto $a, \dots$, protože přirozeně číslují souřadné osy rotací.)

5.1 Unitární grupy

V kvantové teorii pole se často setkáváme s unitárními transformacemi, které působí na vnitřním prostoru vícekomponentního pole. Množina komplexních unitárních matic $N \times N$ s determinantem rovným 1 se nazývá **speciální unitární grupou** $SU(N)$. Že se jedná o grupu plyne z toho, že pokud definující vazby

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} &= \mathbb{I}, \\ 2) \det \mathbf{U} &= 1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

platí pro dvě matice U_1 a U_2 , platí i pro jejich maticový součin $U_1 U_2$. Použijeme-li standardní fyzikální konvenci pro infinitesimální transformace, $\mathbb{I} + \varepsilon X \equiv \mathbb{I} - i\varepsilon T$, dostáváme na generátory T podmínky

$$\begin{aligned} 1) (\mathbb{I} - i\varepsilon T)^\dagger (\mathbb{I} - i\varepsilon T) &\approx \mathbb{I} + i\varepsilon (T^\dagger - T) \stackrel{!}{=} \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad T^\dagger = T, \\ 2) \det(\mathbb{I} - i\varepsilon T) &\approx 1 - i\varepsilon \operatorname{Tr} T \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} T = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Generátory T Lieovy grupy $SU(N)$ jsou tedy hermitovské matice s nulovou stopou a její Lieova algebra, kterou označujeme jako $\mathfrak{su}(N)$, má dimenzi $N^2 - 1$.

Pokud nenaložíme podmínku $\det U = 1$, obdržíme místo speciální unitární grupy pouze **unitární grupu** $U(N)$. Příslušná algebra $\mathfrak{u}(N)$ má dimenzi N^2 , obsahuje totiž oproti $\mathfrak{su}(N)$ matici $-i\mathbb{I}$ (jejíž stopa je nenulová). Všimněte si, že transformace generované maticí $\mathbb{I}$ jsou pouhými násobky jednotky, $e^{-i\lambda\mathbb{I}} = e^{-i\lambda}\mathbb{I}$, a mají tedy za následek fázový posun.

Uvedme si nyní některé konkrétní příklady (speciálních) unitárních grup a algeber. Začneme Lieovou grupou a algebrou

$$U(1) = \{e^{-i\lambda} \mid \lambda \in [0, 2\pi)\} \quad \text{a} \quad \mathfrak{u}(1) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{-i\}. \quad (5.8)$$

($SU(1) = \{1\}$ a $\mathfrak{su}(1) = \{0\}$ — to by bylo až příliš triviální.) Grupa $U(1)$ je tedy jednotkovou kružnicí v komplexní rovině.

Další na řadě je grupa $SU(2)$ (viz Cvičení 22) a její algebra

$$\mathfrak{su}(2) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \underbrace{-\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma^1}, \underbrace{-\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma^2}, \underbrace{-\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma^3} \right\}. \quad (5.9)$$

Matice σ^i se nazývají *Pauliho matice* a ve fyzice se poprvé objevily v roce 1927 v souvislosti s popisem spinu nerelativistické kvantové částice. (V matematice však byla ekvivalentní struktura známa již dříve a to pod pojmem *kvaterniony*.) Generátory $-\frac{i}{2}\sigma^i$ splňují stejné komutační relace jako generátory rotační algebry $\mathfrak{so}(3)$, matice M_i (viz Cvičení 21). Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{so}(3)$ tedy od sebe na úrovni komutačních relací nerozeznáme a říkáme, že se jedná o dvě různé **reprezentace** téže abstraktní Lieovy algebry, standardně označované jako $\mathfrak{su}(2)$. První je reprezentace na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^2$ pomocí komplexních matic 2×2 , druhá na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ pomocí reálných matic 3×3 .

Nakonec ještě zmíníme grupu $SU(3)$, která je základem teorie silných interakcí. Její algebra $\mathfrak{su}(3)$ obsahuje 8 nezávislých hermitovských bezestopých komplexních matic 3×3 (standardně volených jako tzv. *Gell-Mannovy matice*).

Obecně, grupu G , v níž všechny prvky mezi sebou komutují, $g_1 g_2 = g_2 g_1$, nazýváme grupou **abelovskou** (po norském matematikovi Abelovi). Jinak hovoříme o grupách **neabelovských**. Příkladem abelovské grupy je $U(1)$, zatímco $SU(2)$ a $SU(3)$ jsou grupy neabelovské. Rovněž neabelovskou je grupa $SO(3)$ (tvořená rotacemi (2.6)) a grupa Lorentzových transformací (2.12). Omezíme-li se v dané Lieově grupě na jednoparametrickou podmnožinu $\{e^{\lambda X}\}$ generovanou libovolným generátorem X , obdržíme abelovskou podgrupu. Máme-li více generátorů, které spolu komutují, pak jejich exponenciací dostaneme vícedimenzionální abelovskou podgrupu (případně i celou grupu, jsou-li strukturní konstanty dané algebry identicky rovny nule). Například podmnožina rotací a boostů určených stejnou osou je dvoupametrická abelovská podgrupa Lorentzovy grupy.

5.2 Reprezentace Lieových algeber

Mějme dva vektorové prostory (nad stejným tělesem)

$$V_1 = \text{span}\{e_1, \dots, e_{n_1}\} \quad \text{a} \quad V_2 = \text{span}\{f_1, \dots, f_{n_2}\}. \quad (5.10)$$

Existují dva základní způsoby, jak jejich kombinací vytvořit nový vektorový prostor:

$$\begin{aligned} 1) \text{ direktní součet : } V_1 \oplus V_2 &= \text{span}\{e_1, \dots, e_{n_1}, f_1, \dots, f_{n_2}\}, \\ 2) \text{ tenzorový součin : } V_1 \otimes V_2 &= \text{span} \left\{ \begin{array}{ccc} e_1 \otimes f_1, & \dots & e_1 \otimes f_{n_2}, \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n_1} \otimes f_1, & \dots & e_{n_1} \otimes f_{n_2} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Direktní součet je tedy vektorovým prostorem dimenze $n_1 + n_2$, zatímco tenzorový součin je vektorovým prostorem dimenze $n_1 n_2$. Libovolný vektor ve $V_1 \oplus V_2$ můžeme psát jako $v_i e_i + w_j f_j$, libovolný vektor ve $V_1 \otimes V_2$ jako $v_{ij} e_i \otimes f_j$. (Pozor, kartézský součin $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ je ve skutečnosti direktním součtem vektorových prostorů $\mathbb{R}^{n_1}$ a $\mathbb{R}^{n_2}$.)

Zajímáme-li se o (nekonečněrozměrné) vektorové prostory funkcí definovaných na oblastech Ω_1 , resp. Ω_2 , pak jejich direktní součin je tvořen funkcemi definovanými na sjednocení $\Omega_1 \cup \Omega_2$, kdežto tenzorový součin obsahuje funkce dvou proměnných $(x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Jak jsme viděli na příkladu algeber $\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{so}(3)$, stejné komutační relace mohou být splněny (reprezentovány) různými množinami matic, které obecně působí na různých vektorových prostorech různé dimenze (tzv. *dimenze reprezentace*). Mějme dvě množiny generátorů $\{X_a^{(1)}\}$ a $\{X_a^{(2)}\}$ působící na vektorových prostorech V_1 , resp. V_2 , obě splňující stejné komutační relace (5.5). Na direktním součtu $V_1 \oplus V_2$ působí tyto generátory transformacemi

$$\begin{pmatrix} e^{\varepsilon X_a^{(1)}} v_1 \\ e^{\varepsilon X_a^{(2)}} v_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon X_a^{(1)} v_1 \\ \varepsilon X_a^{(2)} v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} X_a^{(1)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & X_a^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

zatímco na tenzorovém součinu $V_1 \otimes V_2$ máme transformace

$$\begin{aligned} (e^{\varepsilon X_a^{(1)}} v_1) \otimes (e^{\varepsilon X_a^{(2)}} v_2) &\approx v_1 \otimes v_2 + (\varepsilon X_a^{(1)} v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (\varepsilon X_a^{(2)} v_2) \\ &= v_1 \otimes v_2 + \varepsilon (X_a^{(1)} \otimes \mathbb{I}^{(2)} + \mathbb{I}^{(1)} \otimes X_a^{(2)}) (v_1 \otimes v_2). \end{aligned} \quad (5.13)$$

V případě **direktního součtu reprezentací** mají tedy výsledné generátory tvar blokově diagonálních matic, zatímco v případě **tenzorového součinu reprezentací** jsou výsledné generátory sumou tenzorových součinů obsahujících jeden generátor a jinak jednotkové matice. Není těžké ověřit, že v obou případech budou výsledné generátory opět splňovat komutační relace (5.5) a získáváme tedy nové reprezentace původní Lieovy algebry.

Reprezentaci nazýváme *reducibilní*, pokud existuje lineární podprostor reprezentačního prostoru V (jiný než $\{0\}$ nebo celé V), který je všemi generátory X_a zobrazen sám do sebe. V takovém případě můžeme matice reprezentace na tento podprostor zúžit, tedy redukovat. V opačném případě, tedy pokud takový netriviální podprostor neexistuje, hovoříme o reprezentaci *ireducibilní*.

Jako příklad uvažujme algebru $\mathfrak{su}(2)$ s generátory $T_i = \frac{1}{2} \sigma^i$, jejíž reprezentačním prostorem je vektorový prostor $\mathbb{C}^2$ a „spin“ této základní reprezentace je $j = 1/2$ (viz diskuze u rovnice (3.9)). Tenzorový součin $\mathbb{C}^2$ sama se sebou má následující podobu:

$$\mathbb{C}^2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.14)$$

Ve Cvičení 24 budeme zkoumat reprezentaci algebry $\mathfrak{su}(2)$ na tomto tenzorovém součinu a ukážeme, že ji lze rozložit na direktní součet dvou různých reprezentací $\mathfrak{su}(2)$ — se spinem $j = 0$ a $j = 1$. Symbolicky potom píšeme $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1}$.

Na závěr se ještě na chvíli zastavme u prostorových rotací $SO(3)$. Jejich akce na bodech prostoru, $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$, indukují reprezentaci na funkcích

$$\psi \mapsto \psi' = \hat{R}\psi : \quad \psi'(\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}), \quad \text{tj.} \quad (\hat{R}\psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}). \quad (5.15)$$

Pro infinitesimální transformace $\mathbb{I} + \varepsilon \mathbf{M}_i$ dostáváme vztah

$$\psi(\mathbf{x}) + \varepsilon(\hat{M}_i\psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{M}_i\mathbf{x}) \approx \psi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{M}_i\mathbf{x})^k \partial_k \psi(\mathbf{x}), \quad (5.16)$$

z něhož můžeme za použití maticových elementů (2.5) vyjádřit operátory

$$\hat{M}_i = -(\mathbf{M}_i)^k_j x^j \partial_k = -\varepsilon_{ijk} x^j \partial_k. \quad (5.17)$$

Ty splňují stejné komutační relace jako generátory $\mathbf{M}_i$, tedy $[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = \varepsilon_{ijk} \hat{M}_k$ (viz rovnice (5.19)), a po vynásobení $i\hbar$ představují kvantově-mechanické operátory momentu hybnosti $\hat{L}_i$. Všimněme si rovněž, že reprezentace rotací na funkcích je unitární, neboť

$$\|\hat{R}\psi\|^2 = \int d^3x |\psi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})|^2 = \int d^3x |\psi(\mathbf{x})|^2 = \|\psi\|^2, \quad (5.18)$$

kde jsme využili toho faktu, že $\det \mathbf{R} = 1$.

5.3 Cvičení

Cvičení 21. *Komutační relace.*

Ověřte komutační relace

1. rotačních generátorů

$$[M_i, M_j] = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \text{kde} \quad (M_i)^j_k = -\varepsilon_{ijk}; \quad (5.19)$$

2. Pauliho matic

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma^k, \quad \text{kde} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Řešení:

1. Rozepíšeme komutátor po složkách

$$[M_i, M_j]^a_b = \varepsilon_{iak} \varepsilon_{jkb} - \varepsilon_{jak} \varepsilon_{ikb} = \delta_{ib} \delta_{aj} - \delta_{jb} \delta_{ai} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{bak} = \varepsilon_{ijk} (M_k)^a_b, \quad (5.21)$$

kde první rovnost vznikla rozepsáním maticového součinu a druhá použitím identity pro součin dvou epsilon při sčítání přes jeden index.

2. Ve Cvičení 13 jsme obdrželi výsledky shrnutí vztahem (3.19). Při jeho použití dostáváme rovnou

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = i\varepsilon_{ijk} \sigma^k - i\varepsilon_{jik} \sigma^k = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma^k. \quad (5.22)$$

Cvičení 22. *Lieova grupa $SU(2)$.*

Nalezněte obecný tvar matic $U \in SU(2)$.

Řešení:

Označíme-li komplexně sdružené číslo k číslu x jako x^* , máme

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

kde inverze se nejsnáze spočítá přes adjungovanou matici. Z požadavku rovnosti matic a jednotkového determinantu dostaneme vztahy

$$d = a^*, \quad c = -b^*, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (5.24)$$

(Jelikož a, b jsou komplexní čísla, poslední podmínka zadává sféru S^3 ; zkoumaná grupa je jí difeomorfní.)

Cvičení 23. *Duální a adjungovaná reprezentace Lieovy algebry.*

Uvažujte Lieovu algebru s komutačními relacemi $[X_a, X_b] = f_{abc} X_c$. Ukažte, že následující matice splňují stejné komutační relace:

1. $-X_a^T$ (tzv. *duální reprezentace*),
2. $(F_a)_{bc} = -f_{abc}$ (tzv. *adjungovaná reprezentace*).

Řešení:

1. Označme $Y_a \equiv -X_a^T$. Pak máme

$$[Y_a, Y_b] = (X_b X_a - X_a X_b)^T = -([X_a, X_b])^T = -(f_{abc} X_c)^T = f_{abc} Y_c, \quad (5.25)$$

kde v první rovnosti byla použita identita $(AB)^T = B^T A^T$.

2. Upravme nejprve komutátor po složkách:

$$[F_a, F_b]^c{}_d = (F_a)^c{}_e (F_b)^e{}_d - (F_b)^c{}_e (F_a)^e{}_d = f_{ace} f_{bed} - f_{bce} f_{aed}. \quad (5.26)$$

Nyní využijeme dvě identity, které platí o strukturních konstantách: jejich antisymetrii v prvních dvou indexech, která plyne ze zavedení přes komutátory, tj. $f_{abc} = -f_{bac}$ a "Jacobiho identitu", která plyne z platnosti Jacobiho identity pro generátory/operátory a zmíněné antisymetrie:

$$0 = [X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = (f_{bce} f_{ade} + f_{cad} f_{bde} + f_{abd} f_{cde}) X_e, \quad (5.27)$$

zde ve formě $f_{bed} f_{cae} + f_{ced} f_{abe} + f_{bce} f_{aed} = 0$. Pokračujeme tedy s (5.26):

$$= f_{ace} f_{bed} + f_{bed} f_{cae} + f_{ced} f_{abe} = f_{ced} f_{abe} = -f_{ecd} f_{abe} = f_{abe} (F_e)^c{}_d, \quad (5.28)$$

což je dokazovaný vztah.

Cvičení 24. Skládání reprezentací algebry $\mathfrak{su}(2)$.

Uvažujte reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ na prostoru $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ danou maticemi

$$T_i^\otimes \equiv T_i \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T_i, \quad \text{kde } T_i = \frac{1}{2} \sigma^i. \quad (5.29)$$

Určete, jak působí operátory $T_3^\otimes$ a $T_i^\otimes T_i^\otimes$ na vektorech standardní báze (5.14), a nalezněte vlastní podprostory operátoru $T_i^\otimes T_i^\otimes$.

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že

$$T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad T_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned} T_3^\otimes \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] &= (T_3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= [T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes [T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.31)$$

a obdobně

$$\begin{aligned} T_3^\otimes \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ T_3^\otimes \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ T_3^\otimes \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dále si uvědomíme, že

$$\mathbf{T}_i \mathbf{T}_i = \frac{1}{4} \sigma^i \sigma^i = \frac{3}{4} \mathbb{I}, \quad (5.33)$$

a zkoumáme působení operátoru

$$\mathbf{T}_i^{\otimes} \mathbf{T}_i^{\otimes} = (\mathbf{T}_i \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \mathbf{T}_i)(\mathbf{T}_i \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \mathbf{T}_i) = [\mathbf{T}_i \mathbf{T}_i] \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes [\mathbf{T}_i \mathbf{T}_i] + 2\mathbf{T}_i \otimes \mathbf{T}_i = \frac{3}{2} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \frac{1}{2} \sigma^i \otimes \sigma^i. \quad (5.34)$$

Připomeňme tvar Pauliho matic (5.9) a počítejme

$$\begin{aligned} (\sigma^i \otimes \sigma^i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (\sigma^i \otimes \sigma^i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ (\sigma^i \otimes \sigma^i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (\sigma^i \otimes \sigma^i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Označíme-li normalizované vektory

$$|\uparrow\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |\uparrow\downarrow \pm \downarrow\uparrow\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad , \quad |\downarrow\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

nacházíme

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{\otimes} \mathbf{T}_i^{\otimes} |\uparrow\uparrow\rangle &= 2 |\uparrow\uparrow\rangle \quad , \quad \mathbf{T}_3^{\otimes} |\uparrow\uparrow\rangle = +1 |\uparrow\uparrow\rangle, \\ \mathbf{T}_i^{\otimes} \mathbf{T}_i^{\otimes} |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle &= 2 |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle \quad , \quad \mathbf{T}_3^{\otimes} |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle = 0, \\ \mathbf{T}_i^{\otimes} \mathbf{T}_i^{\otimes} |\downarrow\downarrow\rangle &= 2 |\downarrow\downarrow\rangle \quad , \quad \mathbf{T}_3^{\otimes} |\downarrow\downarrow\rangle = -1 |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (5.37)$$

a

$$\mathbf{T}_i^{\otimes} \mathbf{T}_i^{\otimes} |\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle = 0 \quad , \quad \mathbf{T}_3^{\otimes} |\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle = 0. \quad (5.38)$$

Navíc platí

$$\mathbf{T}_1^{\otimes} |\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle = 0 \quad , \quad \mathbf{T}_2^{\otimes} |\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle = 0, \quad (5.39)$$

jak můžeme snadno ověřit.

Poznámky:

Podprostor $\text{span}\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ vektorového prostoru $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ má dimenzi 3 a nese (tzv. *tripletní*) reprezentaci se spinem $j = 1$, neboť operátor $\mathbf{T}_i^{\otimes} \mathbf{T}_i^{\otimes}$ na něm má vlastní číslo $2 = 1(1+1)$. Podprostor $\text{span}\{|\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle\}$ má dimenzi 1 a nese triviální (tzv. *singletní*) reprezentaci $j = 0$, jejíž všechny generátory jsou rovny $\mathbb{O}$. Z toho vyplývá, že vektor $|\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle$ je invariantní vůči libovolné $SU(2)$ rotaci $\exp(-i\theta^i \mathbf{T}_i^{\otimes})$.

Kapitola 6

Yang-Millsovy kalibrační teorie

V kapitole 4 jsme narazili na problém, jak do lagrangiánu zahrnout interakci mezi elektromagnetickým polem A_μ a hmotovým Diracovým polem ψ . (Nadále budeme pro čtyřkomponentní Diracovo pole používat obvyklý symbol malého ψ a velké Ψ si necháme pro případ, kdy sdružíme několik různých Diracových spinorů ψ dohromady.) Řešení bylo takové, že jsme „povýšili“ obyčejnou parciální derivaci ∂_μ v Diracově části lagrangiánu na kovariantní derivaci $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, čímž se mezi poli A_μ a ψ vytvořila *minimální vazba*. V této kapitole si tento postup vysvětlíme (a zobecníme) na základě analýzy tzv. *kalibračních symetrií* fyzikální teorie.

6.1 Abelovská teorie – elektromagnetismus

Pro začátek uvažujme pouze volné Diracovo pole ψ . Jeho lagrangián

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (6.1)$$

je, jak víme ze Cvičení 19, invariantní vůči vnitřní transformaci $\psi'(x) = e^{-i\lambda}\psi(x)$ (a ta je tedy symetrií tohoto lagrangiánu). Jelikož λ je ve všech bodech prostoročasu stejná fixní konstanta, mluvíme o *globální* (nebo též „rigidní“) transformaci. Tentýž lagrangián ovšem není invariantní vůči obdobné transformaci v níž $\lambda(x)$ je obecná funkce, tzv. **kalibrační transformaci** (angl. „gauge transformation“)

$$\psi'(x) = e^{-i\lambda(x)}\psi(x) \quad \text{která vede na} \quad \mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\lambda. \quad (6.2)$$

Člen, který je při transformaci lagrangiánu „navíc“, je úměrný Diracovu proudu. Vzniká parciální derivací funkce $e^{-i\lambda(x)}$, která je v případě globálních transformací konstantou a tudíž nehraje roli.

Princip lokální kalibrační invariance postuluje, že pokud je fyzikální teorie invariantní vůči nějaké globální vnitřní transformaci, má být invariantní i vůči odpovídající lokální kalibrační verzi, tj. s parametrem transformace $\lambda(x)$ závislým libovolným způsobem na bodě x . To je možné zařídit tak, že zavedeme nové pole $A_\mu(x)$ s vhodnými transformačními vlastnostmi a modifikujeme s jeho pomocí operátor derivace tak, aby byl výsledný lagrangián kalibračně invariantní. Tato logika nás vede k definici kovariantní derivace

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad \text{pro niž má platit:} \quad D'_\mu\psi' = e^{-i\lambda(x)}D_\mu\psi. \quad (6.3)$$

Tato podmínka vede na následující transformační vztah pro pole A_μ :

$$(\partial_\mu + iqA'_\mu)(e^{-i\lambda}\psi) = e^{-i\lambda}(\partial_\mu + iqA'_\mu - i\partial_\mu\lambda)\psi = e^{-i\lambda}(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\lambda. \quad (6.4)$$

Nové pole se tedy transformuje jako elektromagnetický čtyřpotenciál, kde funkce $\lambda(x)$ určuje kalibrační transformaci dobře známou z klasického elektromagnetismu. (Funkce $\lambda(x)$ je bezrozměrná veličina, neboť vystupuje v exponenciále $e^{-i\lambda(x)}$, a díky předfaktoru $1/q$ má člen $\frac{1}{q}\partial_\mu\lambda$ stejný fyzikální rozměr jako A_μ .)

Lagrangian

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \equiv \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I \quad (6.5)$$

je tedy invariantní vůči kalibrační transformaci, která mění najednou (ψ, A_μ) na (ψ', A'_μ) , neboť

$$\bar{\psi}'(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi' = \bar{\psi}e^{i\lambda(x)}e^{-i\lambda(x)}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (6.6)$$

Na základě požadavku invariance teorie vůči lokálním kalibračním transformacím (6.2) jsme obdrželi (kalibrační) pole A_μ , které má vlastnosti elektromagnetického čtyřpotenciálu. Zatím však nemáme jeho dynamiku — lagrangian (6.5) popisuje pouze dynamiku Diracova pole ve fixním vnějším poli A_μ .

Z klasické teorie elektromagnetismu víme, že přestože A_μ není kalibračně invariantní, intenzita elektrického pole, tedy Faradayův tenzor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, invariantní je: $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Z něj vytvořený skalár (s konvenčním předfaktorem)

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (6.7)$$

je pak invariantní nejen kalibračně, ale i lorentzovsky, a je tedy vhodným příspěvkem do lagrangianu relativistické polní teorie respektující princip lokální kalibrační invariance. Tím je lagrangian kvantové elektrodynamiky (4.2),

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I. \quad (6.8)$$

Člen $\mathcal{L}_{EM}$, který se nazývá „kinetický člen“ elektromagnetického pole, dělá z fixního čtyřpotenciálu A_μ dynamické pole, neboť z jeho variace plynou netriviální evoluční rovnice pro A_μ (Maxwellovy rovnice).

Sečteno a podtrženo, z výchozího bodu, jímž byl Diracův lagrangian (6.1) jsme se na základě požadavku lokální kalibrační invariance pracovali až k Maxwell-Diracovu lagrangianu (6.8), který obsahuje dynamické **kalibrační pole** A_μ , zprostředkující elektromagnetickou interakci mezi diracovskými částicemi. Samozřejmě, celou dobu jsme vlastně věděli, co má vyjít, takže tato procedura se nezdá být z hlediska samotného elektromagnetismu nijak zásadní. Zásadní je ovšem fakt, že použité argumenty je možné zobecnit a získat tak nová zprostředkující pole pro slabou a silnou interakci — intermediální bosony $W^\pm$ a Z^0 a gluony. Při tomto zobecňování hraje klíčovou roli aparát Lieových grup a algeber kapitoly 5.

6.2 Obecné neabelovské kalibrační teorie

Globální transformace $\psi'(x) = e^{-i\lambda}\psi(x)$ je akcí abelovské Lieovy grupy $U(1) = \{e^{-i\lambda}\}$ na vnitřním prostoru pole. Neabelovské kalibrační teorie, které v roce 1954 vymysleli Yang a Mills, jsou

založeny na obecné (kompaktní) Lieově grupě G . Pro určitost (a v souladu s pozdějšími aplikacemi ve standardním modelu) předpokládejme, že máme pole Ψ , které je sjednocením (direktním součtem) několika diracovských polí $\psi^1, \dots, \psi^N$, které odpovídají různým typům částic. (Diracův spinor ψ^r je tedy sám o sobě čtyřkomponentní objekt s komplexními komponentami $(\psi_\alpha^r)_{\alpha=1}^4$.)

Obecné kalibrační transformace jsou určeny maticovými funkcemi $U(x) = \exp(-i\lambda^a(x)\mathbb{T}_a)$ s hodnotami v Lieově algebře $G \subset \mathbb{C}^{N,N}$ jako

$$\Psi'(x) = U(x)\Psi(x), \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} \psi^{1'} \\ \vdots \\ \psi^{N'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{N1} & \dots & U_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \vdots \\ \psi^N(x) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Předpokládejme, že lagrangián dané teorie je invariantní vůči globální verzi těchto transformací, kdy $U \in G$ jsou matice konstantní, a pokusme se povýšit globální invarianci na invarianci lokální. Tak jako v abelovském případě, rovnice (6.3), stačí zavést kovariantní derivaci

$$D_\mu = \mathbb{I}\partial_\mu + igA_\mu \quad (6.10)$$

a požadovat, aby platilo

$$\begin{aligned} D'_\mu \Psi' &= U(x)D_\mu \Psi, \\ \text{tj.} \quad (\partial_\mu + igA'_\mu)(U\Psi) &= U(\partial_\mu + igA_\mu)\Psi. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Úpravou této podmínky dostáváme transformační vztah pro maticové funkce A_μ ,

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (6.12)$$

Vazbová konstanta g určuje (podobně jako elektrický náboj q) sílu interakce mezi hmotovým polem Ψ a nově zavedeným kalibračním polem A_μ .

Pro každou hodnotu indexu μ a každý prostoročasový bod x předpokládáme, že $iA_\mu(x)$ leží v Lieově algebře Lieovy grupy G . To je minimální a zároveň dostatečný požadavek, který zaručí, že po libovolné lokální kalibrační transformaci $U(x)$ nabývá A'_μ dané rovnici (6.12) hodnot ve stejném prostoru jako původní A_μ . Platí totiž, že pro libovolný prostoročasový směr h^μ a parametr $\varepsilon \ll 1$ je výraz $U(x + \varepsilon h)U^{-1}(x)$ infinitesimální transformací tvaru $\mathbb{I} - i\varepsilon\mathbb{T}(x; h)$, pro jejíž generátor dostáváme

$$\mathbb{T}(x; h) \approx \frac{i}{\varepsilon}(U(x + \varepsilon h)U^{-1}(x) - \mathbb{I}) \approx i(\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (6.13)$$

Navíc platí, že pokud $\mathbb{I} - i\varepsilon\mathbb{T}$ je infinitesimální transformací s nějakým generátorem $\mathbb{T}$, je infinitesimální transformací rovněž $U(\mathbb{I} - i\varepsilon\mathbb{T})U^{-1}$ a tedy výraz $U\mathbb{T}U^{-1}$ je rovněž generátorem. Z toho plyne, že při kalibrační transformaci (6.12) vektorový potenciál A_μ (přesněji jeho i -násobek iA_μ) neopustí Lieovu algebru.

Yang-Millsovo pole A_μ je neabelovským (maticovým) zobecněním elektromagnetického potenciálu A_μ . Můžeme jej psát jako lineární kombinaci bazických generátorů Lieovy algebry s nekonstantními koeficienty, $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)\mathbb{T}_a$. Pole A_μ má tedy tolik nezávislých komponent A_μ^a , kolik je dimenze Lieovy algebry, resp. Lieovy grupy G . Například v případě symetrie $SU(3)$ nás tedy princip lokální kalibrační invariance vede k zavedení $3^2 - 1 = 8$ individuálních kalibračních polí (gluonů).

Abychom zdefinovali polní intenzitu odpovídající potenciálu A_μ , připomeneme vztah pro elektromagnetický Faradayův tenzor ze Cvičení 18: $iqF_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$. Obdobně i v neabelovském případě definujeme

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (6.14)$$

Všimněme si, že v posledním členu vystupuje komutátor matic A_μ a A_ν , který je charakteristickým rysem neabelovského zobecnění kalibračních teorií. Obecné $F_{\mu\nu}$ není na rozdíl od Faradayova tenzoru $F_{\mu\nu}$ striktně *invariantní* vůči kalibračním transformacím (6.12), ale transformuje se *kovariantně* jako

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1} \quad (6.15)$$

(viz Cvičení 25). To nám umožňuje definovat lorentzovky i kalibračně invariantní lagrangián Yang-Millsova pole A_μ předpisem

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (6.16)$$

obdobně jako v případě elektromagnetického pole (rovnice (6.7)). Přítomnost stopy dělá z matcového výrazu skalár a zároveň zajišťuje kalibrační invarianci Yang-Millsova lagrangiánu. Z $\mathcal{L}_{YM}$ plynoucí Euler-Lagrangeovy pohybové rovnice (viz Cvičení 26)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0 \quad (6.17)$$

se nazývají **Yang-Millovými rovnicemi**. Jedná se o nelineární diferenciální rovnice pro pole A_μ , které jsou na rozdíl od lineárních Maxwellových rovnic mnohem obtížněji řešitelné (neplatí pro ně princip superpozice). Nelinearita má původ v posledním členu rovnice (6.14), díky němuž lagangrián (6.16) obsahuje kubické a kvartické monomy v polích A_μ a jejich derivacích, tedy interakční členy popisující samointerakci neabelovského Yang-Millsova pole.

Na závěr ještě poznamenejme, že v rámci diferenciální geometrie je potenciál A_μ interpretován jako konexe (na principálním bundlu se strukturní grupou G) a intenzita $F_{\mu\nu}$ jako odpovídající křivost.

6.3 Cvičení

Cvičení 25. *Kovariance polní intenzity.*

Jak se transformuje neabelovská polní intenzita $F_{\mu\nu}$ při kalibračních transformacích?

Řešení:

Využijeme operátorový vztah [v podstatě podmínka (6.11)]

$$D'_\mu = U D_\mu U^{-1} \quad (6.18)$$

a (6.14). Můžeme tedy upravovat

$$F'_{\mu\nu} = [D'_\mu, D'_\nu] = \frac{1}{ig}(U D_\mu D_\nu U^{-1} - U D_\nu D_\mu U^{-1}) = U F_{\mu\nu} U^{-1}. \quad (6.19)$$

Cvičení 26. *Yang-Millsovy pohybové rovnice.*

Odvoďte Euler-Lagrangeovy rovnice plynoucí z akce

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad \text{kde} \quad F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (6.20)$$

Řešení:

Pro kompaktní grupy (jiné zde neuvažujeme) platí že stopu součinu generátorů algebry lze "normalizovat" k δ (konkrétní konstanta už je věcí konvence, našemu zápisu akce odpovídá $1/2$), tedy zde $\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2$. To umožňuje (6.16) přepsat jako

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \quad (6.21)$$

Euler-Lagrangeovy rovnice (3.5) budeme vyjadřovat vzhledem k A_ξ^q , potřebujeme tedy akci přepsat pomocí těchto veličin:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ig f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c) (\partial_\alpha A_\beta^a - \partial_\beta A_\alpha^a + ig f_{abc} A_\alpha^b A_\beta^c). \quad (6.22)$$

Následující výpočet je už přímočarý, i když poměrně dlouhý. Využíváme

$$\frac{\partial A_\lambda^a}{\partial A_\xi^q} = \delta_\lambda^\xi \delta_q^a, \quad \frac{\partial(\partial_\omega A_\lambda^a)}{\partial(\partial_\kappa A_\xi^q)} = \delta_\omega^\kappa \delta_\lambda^\xi \delta_q^a. \quad (6.23)$$

Po využití těchto vztahů, aplikaci δ , využití antisymetrie $F_{\mu\nu}$ a vhodném přeznačení sčítacích indexů (ve shodných členech na shodné) dostaneme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\xi^q} = -\frac{ig}{2} F^{\xi\nu b} A_\nu^c (f_{bqc} - f_{bcq}) = ig F^{\xi\nu b} A_\nu^c f_{qbc}, \quad (6.24)$$

kde v poslední rovnosti jsme využili totální antisymetrie strukturních konstant (ta opět platí, pokud jsou generátory "normalizované"). Jednodušeji (analogicky EM případu) dostáváme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\xi^q)} = -F^{\lambda\xi q}. \quad (6.25)$$

Celkem dostáváme rovnice (3.5) tvaru

$$0 = \partial_\lambda F^{\lambda\xi q} + ig F^{\xi\nu b} A_\nu^c f_{qbc} = (\partial_\lambda F_{\lambda\xi} + ig[A_\lambda, F^{\lambda\xi}])^q \Rightarrow D_\lambda F^{\lambda\xi} = 0. \quad (6.26)$$

Cvičení 27. *Bianchiho identita.*

Pomocí Jacobiho identity pro operátory kovariantní derivace D_μ ukažte, že

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\rho F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0, \quad \text{kde} \quad D_\mu F_{\nu\rho} = \partial_\mu F_{\nu\rho} + ig[A_\mu, F_{\nu\rho}], \quad (6.27)$$

a specializujte na případ elektromagnetického pole.

Řešení:

Začneme Jacobiho identitou pro kovariantní derivace, kterou přepíšeme pomocí (6.14):

$$0 = [D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] + [D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] = ig([D_\mu, F_{\nu\rho}] + [D_\rho, F_{\mu\nu}] + [D_\nu, F_{\rho\mu}]). \quad (6.28)$$

Dále si uvědomíme, jak působí jednotlivé komutátory, např. (pro názornost zkoumejme působení na testovací funkci ψ)

$$[D_\mu, F_{\nu\rho}]\psi = D_\mu(F_{\nu\rho}\psi) - F_{\nu\rho}D_\mu\psi = (D_\mu F_{\nu\rho})\psi. \quad (6.29)$$

Využitím analogických vztahů pro všechny tři komutátory v (6.28) dostáváme požadovanou identitu.

Speciálně pro elektromagnetické pole se kovariantní derivace mění v parciální, dostáváme tak jednu z Maxwellových rovnic (vlastně $dF = 0$), jejíž splnění je zaručeno existencí čtyřpotenciálu.

Cvičení 28. *Řešení Yang-Millsových rovnic.* Ukažte, že následující potenciály jsou řešením Yang-Millsových rovnic

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (6.30)$$

1. Rovinné vlny

$$A_\mu(x) = T n_\mu e^{-ik \cdot x}, \quad (6.31)$$

kde T je konstantní matice a n_μ , k_μ konstantní čtyřvektory (pro něj nalezněte dodatečné podmínky);

2. Wu-Yangův monopol pro Lieovu grupu $SU(2)$

$$A_0^a = 0, \quad A_i^a(x) = \frac{1}{g} \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{x^2}. \quad (6.32)$$

Řešení:

1. Nejprve určíme $F_{\mu\nu}$: jelikož všechny složky potenciálu komutují, poslední člen (6.14) je automaticky nulový a máme

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = Ti(n_\mu k_\nu - n_\nu k_\mu) e^{-ikx}. \quad (6.33)$$

Poslední člen polních rovnic (6.17) také musí být automaticky nulový (kovariantní derivace tedy přechází na parciální) a podmínka jejich splnění je

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} = Te^{-ikx}(k_\mu n^\mu k^\nu - k^\mu k_\mu n^\nu) \quad \forall \nu. \quad (6.34)$$

Má-li být řešení netriviální, musí být nulová závorka a zároveň $n_\mu \neq k_\mu$. Minimální podmínka na řešení tedy je

$$k^2 = n \cdot k = 0 \quad (6.35)$$

(jinými slovy k je světlupodobný čtyřvektor kolmý na n).

Poznamenejme, že superpozice dvou řešení s různými T_1 , T_2 obecně řešením není - důvodem jsou objevivší se netriviální komutátory.

2. Kvůli nezávislosti složek potenciálu na x^0 a nulovosti jeho nulté složky platí $F_{0i} = -F_{i0} = 0$, zkoumáme tedy jen prostorové složky. Rozepíšeme rovnici (6.14) po složkách v algebře a najdeme

$$F_{ij}^a = \partial_j A_i^a - \partial_i A_j^a + g\epsilon_{abc}A_i^b A_j^c = \frac{1}{g}\epsilon_{ijk}\frac{x^a x^k}{\mathbf{x}^4}, \quad (6.36)$$

kde v první rovnosti jsme využili strukturní konstanty $\mathfrak{su}(2)$: $f_{abc} = \epsilon_{abc}$.

Nyní ověříme, že výsledek splňuje rovnici (6.17). Opět vyjádříme a vypočítáme nejprve jednotlivé složky v algebře:

$$(D_i F_{ij})^a = \partial_i F_{ij}^a + g\epsilon_{abc}A_i^b F_{ij}^c = \frac{1}{g}\epsilon_{ajk}\frac{x^k}{\mathbf{x}^4} - \frac{1}{g}\epsilon_{ajk}\frac{x^k}{\mathbf{x}^4} = 0, \quad (6.37)$$

kde druhá rovnost skrývá delší, ale přímočarý výpočet (práce s ϵ a δ). Jelikož jednotlivé složky (6.17) v algebře vycházejí nulové, jsou polní rovnice splněny.

Kapitola 7

Elektroslabé sjednocení

Kvantová elektrodynamika (viz kapitola 4) se může opřít o tvar elektromagnetické interakce známý z klasické fyziky. V případě slabých (a rovněž silných) interakcí, které mají krátký dosah a nepůsobí tedy v makroskopickém měřítku, ovšem žádný klasický návod neexistuje. Jediným zdrojem informace o povaze těchto interakcí jsou proto reakce subatomových částic, tedy rozptylové a rozpadové experimenty.

První teorie slabé interakce, kterou formuloval Fermi v roce 1934, využívala lagrangián

$$\mathcal{L}_{Fermi} = \sum_{f=p,n,e,\nu} \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_f - G_F (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) + \text{h.c.}, \quad (7.1)$$

kde G_F je *Fermiho konstanta*, a zkratka „h.c.” znamená hermitovské sdružení předchozího členu. Ten je schopný popsat proces β -rozpadu $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ jako přímou interakci mezi čtyřmi zúčastněnými částicemi (neutron, proton, elektron a antineutrino). Četnost tohoto procesu (tedy rozpadová šířka neutronu) závisí na Fermiho konstantě a tu je tak možno experimentálně určit. Dalším příkladem slabého procesu je reakce $p + p \rightarrow p + n + e^+ + \nu_e$ (s následným vznikem deuteronu pn), jež je základem řetězce termojaderných reakcí produkujících energii ve Slunci. (Z toho důvodu je také Slunce vydatným zdrojem neutrin – každou sekundu jich čtverečním metrem zemského povrchu proletí desítky miliard.)

Už od konce 30tých let se začalo uvažovat o tom, že slabá interakce je způsobena výměnou (kvůli krátkému dosahu velmi hmotné) zprostředkující částice, podobně jako elektromagnetická a silná jaderná interakce, které byly, jak známo, zprostředkovány fotonem, resp. π -mezonem. Moderní teorie slabých interakcí, jež vznikla během 60tých let 20. století, obsahuje zprostředkujících částic hned několik — tzv. **intermediální vektorové bosony** $W^\pm$ a Z^0 . Jejím matematickým základem je Yang-Millova neabelovská kalibrační teorie s grupou $SU(2) \times U(1)$, která spojuje slabé interakce s elektromagnetickými — tzv. **standardní model elektroslabých interakcí** fyziků Weinberga, Salama a Glashowa. Tento model si nyní přiblížíme.

7.1 Parita a její narušení ve slabých interakcích

Nejprve je však třeba vzít v potaz fenomén **nezachování parity** (zrcadlové symetrie) ve slabých interakcích, který byl teoretizován fyziky Yangem a Lee v roce 1956 a krátce nato experimentálně ověřen. Ukázalo se, že v β -rozpadu vzniká více levotočivých než pravotočivých elektronů a při vyšších energiích jsou elektrony prakticky vždy levotočivé (narušení parity je maximální).

Točivost částice popsané Diracovým polem je detekována tzv. *operátorem chiralidy*, tj. pozorovatelnou

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (7.2)$$

která má dvě vlastní hodnoty: $+1$ pro pravotočivou část a -1 pro levotočivou část pole. Libovolnou funkci $\psi(x) \in \mathbb{C}^4$ můžeme rozložit do superpozice $\psi = \psi_L + \psi_R$, kde

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \psi \quad (7.3)$$

a tedy $\gamma^5\psi_L = -\psi_L$ a $\gamma^5\psi_R = +\psi_R$. V dalším budeme pracovat odděleně s pravotočivými a levotočivými částmi Diracových polí — teorie bude tzv. *chirální*.

Z hlediska kalibračních teorií je zásadní část Diracova lagrangiánu obsahující parciální derivace, které jsou povýšeny na derivace kovariantní a tím se do teorie dostávají zprostředkující pole (Yang-Millovy potenciály A_μ). Ve Cvičení 29 si ukážeme, že tato část se rozpadá na součet pravotočivého a levotočivého členu,

$$\mathcal{L}_D^{(m=0)} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R. \quad (7.4)$$

Pro určitost se nyní budeme zabývat elektroslabou interakcí leptonů elektronového typu, tedy elektronem e a elektronovým neutrinem ν_e . Existují však další dvě generace leptonů (mion μ se svým neutrinem ν_μ a tauon τ se svým neutrinem ν_τ) a elektroslabé interakce působí i mezi kvarky. Každá ze zmíněných částic (včetně své antičástice) je popsána odpovídajícím Diracovým polem. Pro přehlednost budeme používat zkrácený zápis $e_L \equiv \psi_{e,L}$, $e_R \equiv \psi_{e,R}$, atd., běžný v částicové fyzice, a symbolem ν budeme rozumět elektronové neutrino ν_e .

7.2 Kalibrační teorie $SU(2) \times U(1)$

V elektroslabé teorii tvoří levotočivé části leptonů *dublet* a pravotočivé části dva *singlety*,

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad e_R, \quad \nu_R, \quad (7.5)$$

neboť pro ně platí různá transformační pravidla. Při $U(1)$ kalibrační transformaci postulujeme

$$\begin{pmatrix} \nu'_L \\ e'_L \end{pmatrix} = e^{-i\lambda Y_L} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad e'_R = e^{-i\lambda Y_R^{(e)}} e_R, \quad \nu'_R = e^{-i\lambda Y_R^{(\nu)}} \nu_R. \quad (7.6)$$

Jedná se vlastně o tři různé reprezentace transformace $e^{-i\lambda(x)}$, jejichž generátory jsou prozatím neurčené konstanty Y_L , $Y_R^{(e)}$ a $Y_R^{(\nu)}$. Ukazuje se, že bez újmy na obecnosti můžeme (a budeme) volit $Y_L = -1/2$.

Pro $SU(2)$ kalibrační transformace $U(x)$, jejichž generátory jsou matice $T_a = \frac{\sigma_a}{2}$, máme

$$\begin{pmatrix} \nu'_L \\ e'_L \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad e'_R = e_R, \quad \nu'_R = \nu_R. \quad (7.7)$$

Singletní reprezentace $SU(2)$ tedy mají triviální generátory $T_a = 0$.

Na základě principu lokální kalibrační invariance zavádíme

1. abelovské kalibrační pole B_μ s vazbovou konstantou g' , odpovídající symetrii $U(1)$;

2. neabelovské kalibrační pole $A_\mu = A_\mu^a T_a = A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$ ($a = 1, 2, 3$) s vazbovou konstantou g , odpovídající symetrii $SU(2)$.

Parciální derivace Diracových polí (viz lagrangián (7.4)) nahradíme derivacemi kovariantními, čímž se v teorii objeví interakce mezi leptony a kalibračními poli. Odpovídající interakční lagrangián má tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) i\gamma^\mu \left(igA_\mu^1 \frac{\sigma^1}{2} + igA_\mu^2 \frac{\sigma^2}{2} + igA_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2} - ig'B_\mu \frac{\mathbb{I}}{2} \right) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\ & + (\bar{\nu}_R \quad \bar{e}_R) i\gamma^\mu ig'B_\mu \begin{pmatrix} Y_R^{(\nu)} & 0 \\ 0 & Y_R^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

kde jsme využily poznatků (6.3) (s nahrazeními $A_\mu \rightarrow B_\mu$, $\lambda \rightarrow \lambda Y$ a $q \rightarrow g'Y$) a (6.10) z kapitoly 6. Kalibrační pole B_μ a A_μ^a nemají přímý fyzikální význam. Ten budou mít až jejich určité lineární kombinace, které získáme pomocí následujících úprav.

Připomeňme definici Pauliho matic (5.9) a rozdělme lagrangián na tři části: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_Z$. První (mimodiagonální) část tvoří členy se σ^1 a σ^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) i\gamma^\mu \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} 0 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\ = & -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+ - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^-, \quad \text{kde} \quad W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ta popisuje interakci mezi elektronem a neutrinem zprostředkovanou elektricky nabitým intermediálním bosonem W .

Ve zbývajících diagonálních částech nejprve zavedeme lineární kombinace A_μ a Z_μ kalibračních polí A_μ^3 a B_μ vztahem

$$\begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

kde parametr θ_W se nazývá Weinbergův úhel (nebo též slabý, angl. „weak“, úhel). Dosadíme do (7.8) a zaměříme se pouze na část

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A = & (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \gamma^\mu A_\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -g \sin \theta_W + g' \cos \theta_W & 0 \\ 0 & g \sin \theta_W + g' \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\ & + (\bar{\nu}_R \quad \bar{e}_R) \gamma^\mu A_\mu g' \cos \theta_W \begin{pmatrix} -Y_R^{(\nu)} & 0 \\ 0 & -Y_R^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

obsahující pole A_μ . To má představovat elektromagnetické pole, jehož interakce s elektronem (jenž má náboj $q = -e$) a s neutrinem (jež nese náboj $q = 0$) je popsána lagrangiánem kvantové elektrodynamiky (viz rovnice (4.2))

$$\mathcal{L}_{QED,I} = (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \gamma^\mu A_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_R \quad \bar{e}_R) \gamma^\mu A_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Porovnáním $\mathcal{L}_A \stackrel{!}{=} \mathcal{L}_{QED,I}$ dostáváme 4 podmínky,

$$\begin{aligned} -g \sin \theta_W + g' \cos \theta_W &= 0, \\ g \sin \theta_W + g' \cos \theta_W &= 2e, \\ -Y_R^{(\nu)} g' \cos \theta_W &= 0, \\ -Y_R^{(e)} g' \cos \theta_W &= e, \end{aligned} \quad (7.13)$$

které můžeme přepsat jako

$$Y_R^{(\nu)} = 0 \quad , \quad Y_R^{(e)} = -1 \quad , \quad e = g \sin \theta_W \quad , \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g}. \quad (7.14)$$

(Všimněme si, že bez „mixingu“ (7.10), tj. pro $\theta_W = 0$ bychom dostali podmínku $e = 0$ a standardní lagrangian kvantové elektrodynamiky bychom nedokázali reprodukovat.)

Z požadavku konzistence elektroslabé teorie s elektrodynamikou jsme tedy získali 2 vztahy mezi 4 parametry elektroslabých interakcí e, g, g', θ_W a dále se nám podařilo fixovat hodnoty tzv. **slabého hypernáboje** Y . (Připomeňme, že od začátku máme $Y_L = -1/2$.) Necht' tzv. **slabý izospin** T_3 má hodnoty

$$T_3(\nu_L) = \frac{1}{2} \quad , \quad T_3(e_L) = -\frac{1}{2} \quad , \quad T_3(\nu_R) = 0 \quad , \quad T_3(e_R) = 0, \quad (7.15)$$

tedy dává $\pm 1/2$ pro vlastní stavy dubletové reprezentace $SU(2)$ s izospinem $1/2$; a je 0 pro singletní reprezentace s izospinem 0. Potom platí, že elektrický náboj uvažovaných částic (v jednotkách e) je vyjádřen vztahem

$$Q = T_3 + Y, \quad (7.16)$$

z něhož můžeme správně reprodukovat hodnoty náboje $Q(\nu_{L,R}) = 0$ a $Q(e_{L,R}) = -1$. Veličiny T_3 a Y charakterizují částice z hlediska jejich elektroslabé interakce, obdobně jako elektrický náboj Q charakterizuje částice z hlediska jejich interakce s elektromagnetickým polem.

Zbývající část $\mathcal{L}_Z$ lagrangiánu (7.8), kterou si rozebereme ve Cvičení 30, popisuje interakci leptonů a neutrálního vektorového bosonu Z^0 . Z toho, že $\mathcal{L}_Z$ je diagonální, je patrné, že Z^0 se váže na leptony se stejným nábojem a je tudíž elektricky neutrální. Ve standardním modelu elektroslabých interakcí máme celkem 4 zprostředkující částice: nemotný foton γ pro (dalekodosahovou) elektromagnetickou interakci a hmotné intermediální bosony $W^\pm$ a Z^0 pro (krátkodosahovou) slabou interakci. Zahrnutí hmotností intermediálních bosonů do lagrangiánu však není jednoduchý úkol. Obvyklé hmotnostní členy typu $m^2 B_\mu B^\mu$ (viz lagrangian Klein-Gordonova pole (3.10) a Prociův lagrangian (3.32)) totiž nejsou kalibračně invariantní. Řešení přináší tzv. *Higgsův mechanismus*, o kterém si povíme v kapitole 8.

Jak souvisí elektroslabá vazbová konstanta g s Fermiho konstantou G_F ? Elektroslabá teorie je vlastně rozšířením Fermiho teorie (příslušným způsobem modifikované pro chirální leptony), které je platné i při vysokých energiích. Při energiích podstatně nižších, než jaké odpovídají hmotnostem intermediálních bosonů $m_W \doteq 80$ GeV, resp. $m_Z \doteq 91$ GeV, se však na ni redukuje a roli intermediálních bosonů lze zanedbat. (Obdobně se plná dynamická teorie elektromagnetického pole redukuje v nerelativistické limitě na Coulombovu interakci). Dá se pak ukázat, že

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (7.17)$$

Existence intermediálních bosonů byla experimentálně potvrzena v roce 1983 na urychlovači SPS v CERNu. Ten byl původně koncipován jako jednotubusový synchrotron pro srážky protonů s pevným terčem, avšak podařilo se jej přebudovat na „collider“ protiběžných svazků protonů a antiprotonů a tím dosáhnout energie potřebné k produkci intermediálních bosonů. V současnosti slouží jako předurychlovač pro největší světový částicový urychlovač LHC. (Ten je již dvoutubusový a dokáže proto srážet protiběžné svazky souhlasně nabitých částic, například protony s protony.)

7.3 Cvičení

Cvičení 29. *Chirální rozklad Diracova lagrangiánu.*

Ukažte, že

1. Diracův lagrangián bez hmotového členu je možno psát jako

$$\bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R. \quad (7.18)$$

2. Hmotový člen má tvar

$$-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L). \quad (7.19)$$

Řešení:

1. Použijeme rozklady $\psi = \psi_L + \psi_R$, $\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R$, kde platí (7.3) a analogicky (diracovským sdružením vztahu)

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5), \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1 - \gamma^5). \quad (7.20)$$

Potom lze psát

$$\bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L. \quad (7.21)$$

O druhých dvou členech je potřeba dokázat, že jsou nulové. Explicitním dosazením (7.3) a (7.20) a využitím $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$ dostáváme po roznásobení a odečtení zjevně shodných členů

$$\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^5\psi). \quad (7.22)$$

Tyto členy se však vzájemně odečtou - násobení γ^5 zleva u spinoru, resp. zprava u jeho diracovského sdružení způsobí změnu znaménka první složky. Vzájemným vynásobením v druhém členu se tyto změny vyruší a výsledek je tak stejný, jako u prvního členu.

2. Rozepíšeme

$$-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_L + \bar{\psi}_R\psi_R) \quad (7.23)$$

a o druhých dvou členech opět dokážeme nulovost. Dosaďme za

$$\bar{\psi}_L\psi_L = \frac{1}{4}\bar{\psi}(1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5)\psi = \frac{1}{4}(\mathbb{I} - \mathbb{I})\psi = 0, \quad (7.24)$$

kde jsme využili $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$. U posledního členu (7.23) je postup zcela analogický.

Cvičení 30. *Lagrangián s neutrálním bosonem Z .*

Určete $\mathcal{L}_Z$. Jaká interakční konstanta odpovídající interakci mezi Z a pravotočivým elektromem e_R ? (Vyjádřete ji pomocí elementárního elektrického náboje e a vazbové konstanty g .)

Řešení:

Vyjdeme z diagonální části lagrangiánu (7.8), tedy

$$\mathcal{L}_{diag} = -(\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \gamma^\mu \left(g A_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2} - g' B_\mu \frac{\mathbb{I}}{2} \right) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} - (\bar{\nu}_R \quad \bar{e}_R) \gamma^\mu g' B_\mu \begin{pmatrix} Y_R^{(\nu)} & 0 \\ 0 & Y_R^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Nyní aplikujeme transformaci (7.10), která umožní rozdělit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_Z$. Nás zajímá druhá část, kterou lze po zjednodušujících úpravách přepsat jako

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z = & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu Z_\mu \begin{pmatrix} g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W & 0 \\ 0 & -g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W Y_R^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R & \bar{e}_R \end{pmatrix} \gamma^\mu Z_\mu \begin{pmatrix} g' \sin \theta_W Y_R^{(\nu)} & 0 \\ 0 & g' \sin \theta_W Y_R^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Hledaná interakční konstanta je tedy

$$g_R^{(e)} = -g' \sin \theta_W Y_R^{(e)} = \frac{e^2}{\sqrt{g^2 - e^2}}, \quad (7.27)$$

kde jsme využili (7.14) a vztah $\text{tg}(\arcsin x) = x/\sqrt{1-x^2}$.

Cvičení 31. *Kinetické členy kalibračních polí.*

Jak vypadají kinetické členy kalibračních polí A_μ a B_μ (tedy kvadratické členy obsahující derivace těchto polí) a jak se změní při mixovací transformaci (7.10)?

Řešení:

Vyjdeme z Yang-Mills lagrangiánu (6.16), který specifikujeme pro $SU(2) \times U(1)$. Víme, že lagrangián lze přepsat jako (6.21). Pro $U(1)$ část máme jediný generátor (tedy v příslušné $F_{\mu\nu}$ není komutátorová část), pro $SU(2)$ část můžeme použít (5.9). Členy vzniklé z komutátoru ale nepatří mezi kinetické (jedná se o tzv. "self-interaction" členy). Dohromady lze kinetickou část zapsat jako

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} (A_{\mu\nu}^a A^{\mu\nu a} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}), \quad (7.28)$$

kde jsme zavedli notaci

$$A_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a, \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (7.29)$$

pro potenciály A_μ náležící $SU(2)$ a B_μ náležící $U(1)$.

Nyní invertujeme transformaci (7.9):

$$A_\mu^1 = \frac{W_\mu^+ + W_\mu^-}{\sqrt{2}}, \quad A_\mu^2 = \frac{W_\mu^- - W_\mu^+}{i\sqrt{2}}. \quad (7.30)$$

Přepíšeme-li pomocí ní první dva členy (7.28) a zavedeme-li notaci $W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm$ dostaneme

$$-\frac{1}{4} (A_{\mu\nu}^1 A^{\mu\nu 1} + A_{\mu\nu}^2 A^{\mu\nu 2}) = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{\mu\nu +}. \quad (7.31)$$

Na druhé dva členy aplikujeme transformaci (7.10) a notaci $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ a $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Po využití goniometrické jednotky pak dostaneme

$$-\frac{1}{4} (A_{\mu\nu}^3 A^{\mu\nu 3} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} (Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}). \quad (7.32)$$

Součet (7.31) a (7.32) dává celkový (7.28).

Kapitola 8

Spontánní narušení symetrie

K ilustraci konceptu spontánního narušení symetrie využijeme několik příkladů. V prvním si vystačíme se špejlí, kterou postavíme kolmo na stůl a zatlačíme na její horní konec. Při dostatečně velkém tlaku se špejle prohne, aby minimalizovala energii. Otázka zní: jakým směrem? Náš mechanický model je přirozeně symetrický vůči rotacím v rovině stolu a nedokáže tedy žádným způsobem určit směr prohnutí. Přesto si špejle směr vybere a tímto výběrem **spontánně poruší** rotační symetrii. V reálu bude směr prohnutí určen drobnými asymetriemi ve struktuře dřeva, které ovšem nekontrolujeme a náš model je nijak nezahrnuje. Z teoretického hlediska jde o to, že nestlačená špejle má jednoznačný základní (tedy nejnižší energetický) stav, „rovná špejle“, zatímco po stlačení je prohnutých základních stavů nekonečně mnoho — tolik, kolik je hodnot úhlu v rovině stolu. Rotační transformace pak neponechává jednotlivé základní stavy invariantní, nýbrž je převádí jeden na druhý.

Druhý příklad je opět mechanický. Umístíme kuličku na vrchol symetrického kopce (například Gaussova klobouku) a čekáme, kterým směrem se vydá dolů, aby dosáhla nižší potenciální energie. Předpokládáme-li nulové tření, sebemenší i infinitesimální vliv způsobí, že kulička sjede. Pokud bychom do našeho modelu přidali například vítr vanoucí určitým směrem, směr pohybu kuličky by tím byl určen. V takovém případě by se jednalo o tzv. **explicitní narušení** původní rotační symetrie. Pokud však žádný takový vliv do modelu nezahrneme, nemáme nad směrem pohybu kuličky žádnou kontrolu. Víme jen, že si směr sestupu *spontánně* vybere, aby minimalizovala svou energii.

Třetí příklad je již mikroskopický a týká se spontánní magnetizace feromagnetu. Ten může být za určitých podmínek popsán jako soubor klasických spinů (magnetických momentů) $\mathbf{S}_i$, $|\mathbf{S}_i| = 1$, umístěných na mřížce, kde spolu interagují pouze nejbližší sousedé. Hamiltonián (tedy celková energie) systému je dán jako

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (8.1)$$

kde $J > 0$ je interakční konstanta a suma probíhá přes všechny uspořádané dvojice sousedících vrcholů mřížky. Systém je zjevně rotačně symetrický a zároveň platí, že nejnižší energii má konfigurace, kdy všechny vektory $\mathbf{S}_i$ ukazují stejným směrem. Výběr tohoto směru vede ke spontánnímu narušení symetrie. Ve Cvičení 32 si podrobněji rozebereme tzv. **Isingův model**, kde spiny mohou nabývat pouze dvou různých hodnot ± 1 .

8.1 Goldstoneův model

Koncept spontánního narušení symetrie v teorii pole ilustruje tzv. **Goldstoneův model**. Uvažujme lagrangián samointeragujícího komplexního skalárního pole

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - V(\varphi), \quad \text{kde} \quad V(\varphi) = -\mu^2 \varphi^* \varphi + \lambda(\varphi^* \varphi)^2 \quad (\mu, \lambda > 0) \quad (8.2)$$

je polní potenciál. Tato teorie je invariantní vůči globální fázové transformaci $\varphi'(x) = e^{-i\alpha} \varphi(x)$.

Všimněme si záporného znaménka hmotnostního členu $-\mu^2 \varphi^* \varphi$. Kdybychom na chvíli zanedbali interakční člen $\lambda(\varphi^* \varphi)^2$, dostali bychom pohybovou rovnici pro pole ve tvaru

$$(\square - \mu^2)\varphi = 0, \quad \text{s disperzním vztahem} \quad p^\mu p_\mu = -\mu^2. \quad (8.3)$$

Ten podle (3.3) implikuje rychlost vlnových balíků (tj. částic pole φ)

$$\frac{|v|}{c} = \frac{|\mathbf{p}|}{E} c = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 - \mu^2}} \geq 1, \quad (8.4)$$

která je nadsvětelná a tudíž nefyzikální. (Částice s nadsvětelnou rychlostí se nazývají *tachyony*.) Pokud má tedy hmotový člen „špatné“ znaménko, hraje interakční člen nezanedbatelnou úlohu.

Vraťme se tedy ke kompletnímu lagrangiánu (8.2) a určíme hustotu energie pole (tj. hustotu hamiltoniánu). Podle (3.15) je

$$\mathcal{H} = T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^*)} \partial_0 \varphi^* - \mathcal{L} = (\partial_0 \varphi^*)(\partial_0 \varphi) + (\nabla \varphi^*) \cdot (\nabla \varphi) + V(\varphi). \quad (8.5)$$

Minimální hustoty energie dosahují konstantní polní konfigurace $\varphi(x) = \varphi_0$, které navíc minimalizují funkci $V(\varphi)$. Obecně se polní konfigurace s nejnižší energií nazývá *vakuový stav*.

V dalším budeme uvažovat rozklad komplexního pole na radiální a úhlovou část:

$$\varphi(x) = \rho(x) \exp\left(i \frac{\pi(x)}{v}\right), \quad \text{kde} \quad v \equiv \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (8.6)$$

Polní potenciál je pak pouze funkcí ρ ,

$$V(\rho) = -\mu^2 \rho^2 + \lambda \rho^4 \triangleq \lambda \left(\rho^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 \quad (8.7)$$

kde jsme vypustili konstantní člen $-\frac{\lambda}{4}v^4$, a lagrangián má v řeči reálných polí ρ a π tvar

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{\rho^2}{v^2} (\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) - V(\rho). \quad (8.8)$$

($\mathcal{L}$ je zjevně invariantní vůči konstantnímu posunu $\pi'(x) = \pi(x) - v\alpha$, odpovídajícímu fázové transformaci $\varphi'(x) = e^{-i\alpha} \varphi(x)$.)

Nyní již uzrál čas ke spontánnímu narušení symetrie. Polní konfigurace $\rho(x) = 0$ není minimem potenciálu (8.7) (a tedy hustoty energie (8.5)), tím je $\rho(x) = \frac{v}{\sqrt{2}}$, přičemž úhlová část $\pi(x) = \pi_0$ může být libovolná konstanta. To znamená, že základní stav $\varphi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\pi/v}$ je degenerovaný (nejednoznačný) a výběr konkrétní hodnoty π_0 odpovídá spontánnímu narušení fázové symetrie.

V kvantové teorii pole obvykle zkoumáme excitace pole kolem stabilní rovnovážné polohy (pak mají příslušné částice „fyzikální“ podsvětelnou rychlost). V našem modelu se proto přesuneme do minima potenciálu redefinicí

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma(x) + v) : \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) + \frac{(\sigma + v)^2}{2v^2}(\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + 2v\sigma)^2. \quad (8.9)$$

Fundamentálními poli Goldstoneova modelu jsou tedy reálná pole $\sigma(x)$ a $\pi(x)$, přestože byl původně definován pomocí komplexního pole $\varphi(x)$. Po úpravě dostáváme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} \underbrace{2\lambda v^2}_{=m_\sigma^2} \sigma^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) + \left[\frac{\sigma^2 + 2v\sigma}{2v^2}(\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^4 + 4v\sigma^3) \right], \quad (8.10)$$

kde jsme do hranaté závorky umístili všechny interakční členy, tedy monomy vyššího než druhého řádu v polích a jejich derivacích. Z tohoto lagrangiánu snadno vyčteme hmotnostní parametry jednotlivých polí: $m_\sigma = \mu\sqrt{2}$, zatímco $m_\pi = 0$. Tzv. **Goldstoneův boson** π je tedy nehmotný, což odpovídá tomu, že v úhlovém směru je potenciál V konstantní funkcí (tj., je rotačně invariantní).

8.2 Higgsův mechanismus

Nyní zavedeme do Goldstoneova modelu (8.2) (minimální) interakci s kalibračním polem obvyklým povýšením parciálních derivací na kovariantní a přidáním kinetického členu kalibračního pole. Dostaneme tedy vlastně lagrangián *skalární elektrodynamiky* zahrnující též samointerakci komplexního skalárního **Higgsova pole** φ ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu - igA_\mu)\varphi^* (\partial^\mu + igA^\mu)\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi - \frac{v^2}{2})^2. \quad (8.11)$$

(Potenciální člen jsme posunuli o konstantu, aby korespondoval s výrazem (8.7).)

Tento lagrangián je invariantní vůči lokálním kalibračním transformacím

$$\varphi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\varphi(x) \quad , \quad \varphi'^*(x) = e^{i\alpha(x)}\varphi^*(x) \quad , \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha. \quad (8.12)$$

Kalibrační volnost můžeme využít k tomu, abychom libovolným způsobem fixovali fázi komplexního pole $\varphi(x)$. Zvolme ji identicky nulovou, tedy $\varphi(x) = \varphi^*(x) = \rho(x) \in \mathbb{R}$, a označme B_μ kalibrační potenciál v této konkrétní kalibraci a $G_{\mu\nu}$ jeho intenzitu (Faradayův tenzor). Potom lagrangián (8.11) má v této kalibraci tvar

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + (\partial_\mu - igB_\mu)\rho (\partial^\mu + igB^\mu)\rho - \lambda(\rho^2 - \frac{v^2}{2})^2. \quad (8.13)$$

Stejně jako v rovnici (8.9) přejdeme od pole $\rho(x)$ k poli $\sigma(x)$ tak, že definujeme $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma(x) + v)$ ($\sigma = 0$ pak odpovídá minimu potenciálu) a dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma - ig\sigma B_\mu - igvB_\mu)(\partial^\mu \sigma + ig\sigma B^\mu + igvB^\mu) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + 2v\sigma)^2 \\ &= -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \underbrace{g^2 v^2}_{=m_B^2} B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} \underbrace{2\lambda v^2}_{=m_\sigma^2} \sigma^2 \\ &\quad + \left[gv\sigma B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}g^2 \sigma^2 B_\mu B^\mu - \lambda v\sigma^3 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 \right], \end{aligned} \quad (8.14)$$

kde hranatá závorka opět zahrnuje interakční členy. Kalibrační invariance lagrangiánu (8.11) nám umožnila eliminovat Goldstoneův boson π (fázi skalárního pole φ), zatímco původně nehmotné kalibrační pole získalo hmotnost $m_B = gv$, jež je úměrná její interakci s Higgsovým polem. Obrazně řečeno: Goldstoneův boson byl spořádan kalibračním bosonem, který díky tomu přibral na váze.

Při energiích mnohem vyšších než v je Higgsovo pole v symetrické fázi a kalibrační bosony efektivně nehmotné. Až když se energie dostanou znatelně pod hodnotu v , nastává mechanismus spontánního narušení symetrie, kdy Higgsovo pole zaujme polohu blízko minima potenciálu a kalibrační bosony získají hmotnost. Celkově je teorie (8.11) kalibračně invariantní, hmotnostní člen $\frac{1}{2}m_B^2 B_\mu B^\mu$ se objeví až v nízkoenergetickém režimu a při vhodném výběru kalibrace. Naproti tomu prosté přidání hmotového členu do lagrangiánu jako v případě Proca pole, rovnice (3.32), vede k teorii bez kalibrační invariance a tedy s celou řadou neduhů (jako například nerenormalizovatelnost — viz kapitola 10.2).

Předchozí model s abelovským kalibračním polem slouží spíše jako ilustrativní příklad. Skutečně fyzikálně zajímavým modelem je až jeho neabelovské zobecnění relevantní pro teorii elektroslabých interakcí z kapitoly 7. V něm zavádíme dvoukomponentní komplexní skalární pole, tzv. *Higgsův dublet* Φ , a Goldstoneův lagrangián

$$\mathcal{L}_{\text{Goldstone}} = (\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad \text{kde} \quad V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Do něj přidáme elektroslabé $U(1) \times SU(2)$ neabelovské kalibrační pole (viz rovnice (7.8)) a získáme tak neabelovský Higgsův lagrangián (zde pro jednoduchost uveden bez kinetických členů a samointerakcí kalibračních polí)

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \Phi^\dagger \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - ig'YB_\mu \right) \left(\overrightarrow{\partial}^\mu + igA^{b\mu} \frac{\sigma^b}{2} + ig'YB^\mu \right) \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2})^2, \quad (8.16)$$

kde šipka naznačuje směr působení parciální derivace. Ve Cvičení 33 si tento neabelovský model rozebereme a ukážeme, že v důsledku spontánního narušení symetrie zbyde z původních čtyř reálných komponent Higgsova dubletu jediná (**Higgsův boson** H) a tři kalibrační bosony ($W^\pm$ a Z^0) se stanou hmotnými, zatímco foton zůstane nehmotný. Výsledkem Higgsova mechanismu jsou Weinbergovy formule pro hmotnosti intermediálních vektorových bosonů

$$m_W = \frac{1}{2}gv \quad , \quad m_Z = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)^{1/2}v. \quad (8.17)$$

Porovnáním s rovnicí (7.17) dává vztah $v = (G_F \sqrt{2})^{-1} \doteq 246 \text{ GeV}$ mezi Fermiho konstantou slabých interakcí G_F a vakuovou hodnotou Higgsova pole v .

8.3 Hmoty leptonů

Nejen hmotnosti kalibračních bosonů, ale i hmotnosti leptonů a kvarků je možné získat skrze interakci příslušného pole s Higgsovým polem. Například, pro zpočátku nehmotný elektron uvažujme interakci popsanou lagrangiánem Yukawova typu

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_e (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} e_R + \text{h.c.}, \quad (8.18)$$

kde h_e je interakční konstanta. Po spontánním narušení symetrie (viz Cvičení 33) dostáváme

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_{Yukawa} &= -h_e \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \end{pmatrix} e_R + \text{h.c.} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} h_e (v + H) (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} h_e v \bar{e} e + -\frac{1}{\sqrt{2}} h_e \bar{e} e H,
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

kde jsme využili vztah $\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L = \bar{e} e$ ze Cvičení 29. Porovnání s Diracovým lagrangiánem $\bar{e}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e)e$ dává hmotnost elektronu

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}} h_e v, \tag{8.20}$$

vyjádřenou prostřednictvím vakuové hodnoty Higgsova pole v a interakční konstanty h_e .

8.4 Cvičení

Cvičení 32. *Isingův model – metoda středního pole.*

Uvažujme statistický soubor N spinů na mřížce, kde každý vrchol i obývá klasický spin $S_i \in \{-1, +1\}$ a celková energie systému je dána jako

$$H(\{S_i\}) = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - B \sum_i S_i \quad (J > 0). \quad (8.21)$$

Zde B je velikost vnějšího magnetického pole a dvojitá suma běží přes všechny uspořádané dvojice sousedících vrcholů mřížky. V metodě středního pole (angl. „mean field”) aproximujeme energii jako

$$H_{MF}(\{S_i\}) = -J \sum_i S_i z m - B \sum_i S_i = -(J z m + B) \sum_i S_i, \quad (8.22)$$

kde $m = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle = \langle S_k \rangle$ je magnetizace na jeden spin (nebo též střední hodnota libovolného spinu) a z udává počet sousedů (stupeň) libovolného vrcholu.

1. V aproximaci středního pole určete partiční sumu $Z_{MF}(\beta, B)$, $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$, a ukažte, že pro magnetizaci m platí podmínka

$$m = \tanh(\beta J z m + \beta B). \quad (8.23)$$

2. Pro případ $B = 0$ nalezněte *kritickou teplotu* T_c takovou, že pro $T > T_c$ má podmínka (8.23) pouze jedno řešení $m = 0$, zatímco pro $T < T_c$ existuje řešení vícero.

Řešení:

- 1.

$$Z_{MF} = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H_{MF}} = (e^{\beta(J z m + B)} + e^{-\beta(J z m + B)})^N \quad (8.24)$$

$$m = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z_{MF} = \frac{\partial}{\partial B} \ln (2 \cosh(\beta J z m + \beta B)) = \tanh(\beta J z m + \beta B) \quad (8.25)$$

2. Z grafů funkcí levé a pravé strany rovnice (8.23) (pro $B = 0$) je zjevné, že kritická teplota je určena podmínkou

$$1 \stackrel{!}{=} \left. \frac{d}{dm} \tanh(\beta J z m) \right|_{m=0} = \beta J z \Rightarrow \beta_c = \frac{1}{J z} \Rightarrow T_c = \frac{J z}{k_B} \quad (8.26)$$

Poznámky:

Isingův model a jeho zobecnění mají široké uplatnění nejen ve fyzice ale i v oblasti strojového učení (viz Hopfieldova síť).

Cvičení 33. *Higgsův mechanismus v elektroslabých interakcích.*

Rozeberte Higgsův mechanismus v elektroslabých interakcích, tj. v neabelovské kalibrační teorii s grupou $U(1) \times SU(2)$ a odvoďte hmoty intermediálních bosonů $m_W = \frac{1}{2} g v$ a $m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v$.

Řešení:

Budeme pracovat s lagrangiánem (8.16). Využijeme kalibrační volnost abychom zafixovali $\Phi(x)$ jako

$$\Phi_U(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x))\xi, \quad \text{tj. } \Phi_U^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x))\xi^\dagger, \quad \text{kde } \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

tj. ze čtyřech polí (dvě komplexní složky) jsme ponechali jedinou - tzv. Higgsovo pole (ostatních složek - Goldstonových bosonů - jsme se zbavili). Tato volba formálně odpovídá lokální SU(2) transformaci (která působí i na kalibrační pole, nebudeme však pro transformovaná pole zavádět speciální notaci). Nyní přepíšme (8.16) v kalibraci (8.27), a zaměříme se na část, z níž vzniknou členy kvadratické v kalibračních potenciálech:

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{v^2}{2}\xi^\dagger(gA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + g'YB_\mu)(gA^{\mu b} \frac{\sigma^b}{2} + g'YB^\mu)\xi. \quad (8.28)$$

Roznásobením získáváme čtyři členy (z nichž dva budou shodné). Explicitním propočtem zjistíme, že $\xi^\dagger \sigma^{1/2} \xi = 0$ a $\xi^\dagger \sigma^3 \xi = 1$. Dále využijeme první vztah (3.19) a dostáváme (8.28) ve tvaru

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{4} g^2 A_\mu^a A^{\mu a} - gg'Y A_\mu^3 B_\mu + g'^2 Y^2 B_\mu B^\mu \right) = \frac{v^2}{8} (g^2 [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] + [gA_\mu^3 - 2g'YB_\mu]^2). \quad (8.29)$$

Na první hranatou závorku využijeme inverze vztahů (7.28), na druhou (7.10). Ty specifikujeme pro (7.14) a $Y = 1/2$ (viz přednáška) a upravíme pomocí identit $\cos(\arctan(x)) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ a $\sin(\arctan(x)) = x/\sqrt{x^2 + 1}$. Nakonec, po odečtení shodných členů dostáváme

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{4} g^2 v^2 W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{1}{8} v^2 (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu, \quad (8.30)$$

z čehož lze skutečně vyčíst hmotnosti intermediálních bosonů jako (8.17). Z celkového lagrangiánu (8.28) zbude po úpravách

$$\mathcal{L}_{Higgs}^U = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \lambda v^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{1}{4} \lambda H^4 + \frac{1}{8} (v + H)^2 (2g^2 W_\mu^- W^{\mu+} + (g'^2 + g^2) Z_\mu Z^\mu). \quad (8.31)$$

Kapitola 9

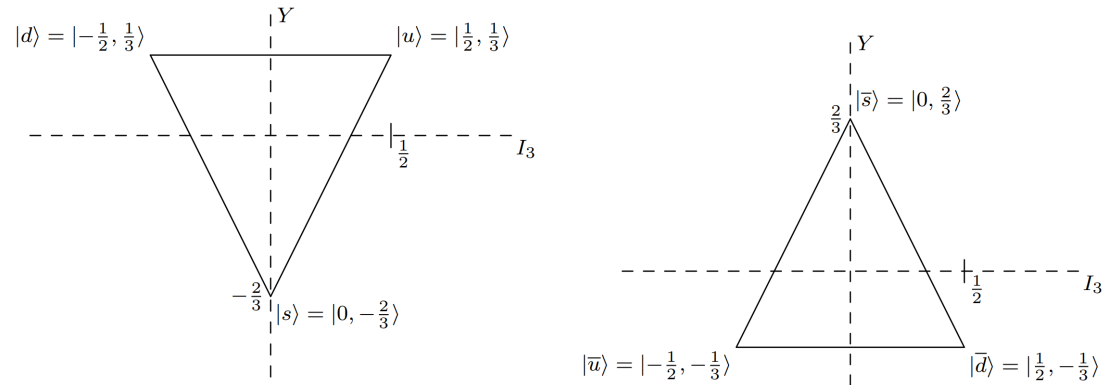
Kvarkový model hadronů

Kvarkový model hadronů navrhli v roce 1964 Gell-Mann a Zweig. V původní verzi obsahoval 3 kvarky: u (up, 2,16 MeV), d (down, 4,7 MeV) a s (strange, 93,5 MeV). Postupem času přibýly ještě další 3 kvarky: c (charm), b (bottom) a t (top), z nichž nejlehčí c -kvark má hmotnost 1273 MeV a je tedy sám o sobě těžší než proton (938,27 MeV) a neutron (939,56 MeV).

Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{C}^3$ s ortonormální bází tvořenou vektory $|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle$ a na něm působící grupu $SU(3)$, jejímiž standardními generátory jsou tzv. *Gell-Mannovy matice* $\lambda_1, \dots, \lambda_8$. Pro naše účely uvedeme jen dvě z nich, diagonální

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

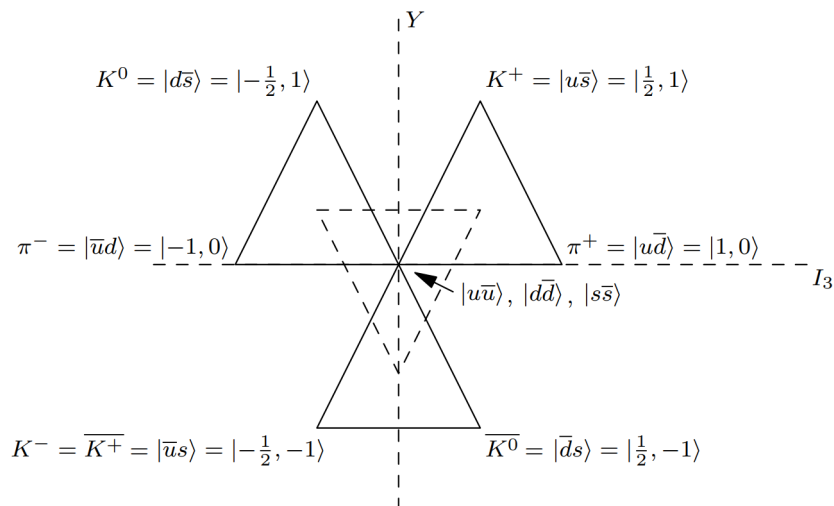
Ty definují tzv. operátory *izospinu* $I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ a *hypernáboje* $Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$. K této základní reprezentaci, označované zkráceně jako **3**, můžeme podle Cvičení 23 vytvořit adjungovanou reprezentaci $-\lambda_a^T$, označovanou $\bar{\mathbf{3}}$. Ta působí na dalším nezávislém prostoru $\mathbb{C}^3$ s bází $|\bar{u}\rangle, |\bar{d}\rangle, |\bar{s}\rangle$, kde operátory izospinu a hypernáboje mají vyjádření $I_3 = -\frac{1}{2}\lambda_3$ a $Y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$. Vlastní stavy jsou vyneseny v diagramech Obr. 9.1, kde jsou zároveň uvedeny jejich vlastní hodnoty I_3 a Y .



Obrázek 9.1: Vlastní stavy operátorů izospinu I_3 a hypernáboje Y v reprezentaci **3** (vlevo) a $\bar{\mathbf{3}}$ (vpravo).

Mezony jsou složení kvarku a antikvarku. V kvantové teorii je složení dvou podsystémů

vyjádřeno tenzorovým součinem stavových prostorů a tedy mezony odpovídají stavům z reprezentačního prostoru tenzorového součinu reprezentací $\mathbf{3} \otimes \mathbf{\bar{3}}$, který lze dále rozložit na direktní součet $\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$. Tyto stavy jsou znázorněny na Obr. 9.2 spolu s názvem příslušné částice a vlastními čísly I_3 a Y .



Obrázek 9.2: Mezony.

Složením tří kvarků dostáváme **baryony**, tedy reprezentaci $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$, již můžeme rozložit do direktního součtu $\mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$. Jeden z oktetů (reprezentace $\mathbf{8}$) obsahuje i proton (kvarkové složení uud) a neutron (udd).

Elektrický náboj hadronů (v jednotkách elementárního náboje e) lze vyjádřit jako

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \quad \text{kde navíc} \quad Y = S + B. \quad (9.2)$$

Veličina S , která udává počet podivných (strange) kvarků v daném hadronu, se nazývá *podivnost*. B je *baryonové číslo* ($B = 1$ pro baryony, $B = -1$ pro antibaryony a $B = 0$ pro mezony). Například proton (uud) má baryonové číslo $+1$, podivnost 0 a izospin $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Formule (9.2) tak dává správně jeho elektrický náboj $Q_p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0 + 1) = 1$.

Zastavme se nyní na chvíli u konceptu **izospinu**. Ten byl zaveden ve 30tých letech po objevu neutronu. Fyzikové si všimli, že rozdíl energií u jader lišících se záměnou protonů a neutronů (např. ${}^3\text{H}$ a ${}^3\text{He}$) je dán pouze rozdílem elektromagnetické interakce a klidové hmotnosti protonů a neutronů. Vazebná energie mezi nukleony, dána silnou jadernou interakcí, tudíž nezávisí na jejich identitě (zda se jedná o proton či neutron). Jakoby proton a neutron byly z hlediska silné interakce různými stavy jedné částice — nukleonu. K jejich rozlišení slouží izotopický spin (izospin), který je jakousi obdobou spinu působící na vnitřním prostoru. Stejně jako u spinu můžeme uvažovat různé reprezentace izospinu, např. na třídimenzionálním vnitřním prostoru tvořeném piony π^- , π^0 a π^+ (viz Obr. 9.2).

Kromě částic složených ze dvou a tří kvarků můžeme uvažovat i vícekvarkové kompozity — tetrakvarky, pentakvarky, atd. Ty se již poslední dobou daří i experimentálně pozorovat.

9.1 Interakce a barvy kvarků

Všimněte si, že součet klidových hmotností kvarků tvoří pouze zhruba 1 % hmotnosti protonu či neutronu. Drtivá část hmotnosti nukleonů je dána mezikvarkovou vazebnou energií silné interakce, tedy energií gluonů — částic, které silnou interakci mezi kvarky zprostředkovávají. Tato interakce je matematicky popsána neabelovskou kalibrační teorií s grupou $SU(3)$, tzv. **kvantovou chromodynamikou** (QCD), jež působí na interním „barevném“ prostoru $\text{span}\{|q_r\rangle, |q_g\rangle, |q_b\rangle\}$ každého kvarku q . Máme tedy opět co do činění s grupou $SU(3)$ (a s její algebrou $\mathfrak{su}(3)$), ovšem tentokrát nepůsobící na prostoru kvarkových typů (flavorů) u, d, s , nýbrž na prostoru barev r (červená), g (zelená) a b (modrá).

Barvy antikvarků jsou opačné (doplňkové) barvy $\bar{r}$ (antičervená, tedy azurová), $\bar{g}$ (antizelená, tedy purpurová) a $\bar{b}$ (antimodrá, tedy žlutá). Koncept barvy je jakýmsi zobecněním elektrického náboje. Týká se však pouze samotných kvarků — hadrony jsou jako celek vždy barevně neutrální.

Mezikvarkové síly dosahují mírně za hranice hadronů a způsobují efektivní mezinukleonovou jadernou sílu, zprostředkovanou mezony $\pi^\pm$ a π^0 .

Kvarkovou substrukturu hadronů zkoumají od konce 60tých let experimenty *hlubokého nepružného rozptylu* (angl. „deep inelastic scattering”), kdy vysokoenergetické leptony (elektrony, miony, neutrina) narážejí do protonů či neutronů. Díky své vysoké energii, tedy krátké vlnové délce, dokážou nahlédnout dovnitř hadronu a přitom jej excitovat (odtud přívlastek „nepružný” rozptyl).

Na kvarky působí i elektroslabá interakce. Stejně jako leptony tvoří levotočivé dublety a pravotočivé singlety

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad u_R, \quad d_R, \quad c_R, \quad s_R, \quad t_R, \quad b_R, \quad (9.3)$$

jejichž interakce s vektorovými bosony γ , Z^0 a $W^\pm$ jsou obdobou vztahů v kapitole (7.2). Interakce s nabitými bosony $W^\pm$ však není jen prostým součtem lagrangiánů (7.9) přes jednotlivé kvarkové dublety, nýbrž má tvar

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \quad \bar{c}_L \quad \bar{t}_L) \gamma^\mu V_{CKM} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.}, \quad (9.4)$$

kde V_{CKM} je unitární matice 3×3 , tzv. **Cabibbo-Kobayashi-Maskawova matice**. Ta popisuje experimentálně pozorované přeměny kvarků, resp. z nich vytvořených hadronů, v důsledku slabých interakcí. Má celkem 4 parametry (viz Cvičení 35): 3 úhly odpovídající ortogonální transformaci a 1 komplexní fázi. Tato fáze popisuje experimentálně pozorované narušení **CP symetrie**, tj. kombinace parity P a záměny částic za antičástice, tzv. *nábojového sdružení* (angl. „charge conjugation”) C .

Kromě C a P je často uvažována ještě třetí diskrétní transformace — obrácení času (angl. „time reversal”) T . Složená transformace CPT je symetrií v rámci každé relativistické kvantové teorie pole a její narušení se skutečně experimentálně nepozoruje.

9.2 Cvičení

Cvičení 34. *Skládání reprezentací v diagramech.*

1. Pro algebru $\mathfrak{su}(2)$, jejíž základní reprezentace $\frac{1}{2}$ má reprezentační prostor $\text{span}\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, graficky znázorněte stavy v reprezentacích $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$. (Na horizontální osu vynášejte vlastní hodnoty operátoru T_3 , jehož základní reprezentace je $\frac{1}{2}\sigma^3$.)
2. Pro algebru $\mathfrak{su}(3)$, jejíž základní reprezentace $\mathbf{3}$ má reprezentační prostor $\text{span}\{|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle\}$, graficky znázorněte stavy v reprezentacích $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ a $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$. (Na horizontální osu vynášejte vlastní hodnoty operátoru I_3 , jehož základní reprezentace je $\frac{1}{2}\lambda_3$. Na vertikální osu vynášejte vlastní hodnoty operátoru Y , jehož základní reprezentace je $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$.)

Řešení:

1. Můžeme částečně využít značení a výsledky Cvičení 24. Na reprezentačním prostoru základní reprezentace máme bázi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\uparrow\rangle, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\rangle \right\}. \quad (9.5)$$

Báze na reprezentačním prostoru $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ je pak dána $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$, kde který značí tenzorové součiny vektorů původní báze v uvedeném pořadí. Rozšíření T_3 na tomto prostoru definujeme jako ve Cvičení 24: $T_3^\otimes := T_3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T_3$. Rozepíšeme-li ho explicitně, dostáváme

$$T_3^\otimes = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

tedy vlastní čísla a příslušné vlastní vektory jsou

$$\lambda_1 = 1 : \{|\uparrow\uparrow\rangle\}, \quad \lambda_2 = -1 : \{|\downarrow\downarrow\rangle\}, \quad \lambda_{3,4} = 0 : \{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}. \quad (9.7)$$

Což lze graficky vynést na osu dle pokynů.

Pro reprezentaci $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ definujeme rozšíření analogicky $T_3^\otimes \equiv \mathbb{I} \otimes T_3 \otimes \mathbb{I} + T_3 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes T_3$, po rozepsání explicitně

$$T_3^\otimes = \frac{1}{2} \text{diag}(1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -3). \quad (9.8)$$

Analýzou vlastních čísel a vektorů dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3}{2} : \{|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\}, & \lambda_2 &= -\frac{3}{2} : \{|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\}, \\ \lambda_{3,4,5} &= \frac{1}{2} : \{|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\}, & \lambda_{6,7,8} &= -\frac{1}{2} : \{|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

což opět vyneseme na osu dle pokynů. Složení a značení báze je analogické předchozímu.

2. Pro základní reprezentaci máme bázi

$$\{|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |s\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}. \quad (9.10)$$

Pro reprezentaci $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ bude báze reprezentačního prostoru opět tvořená tenzorovými součiny, tj. $\{|uu\rangle, |ud\rangle, |us\rangle, |du\rangle, |dd\rangle, |ds\rangle, |su\rangle, |sd\rangle, |ss\rangle\}$. Definujeme rozšíření $I_3^\otimes = \mathbb{I} \otimes I_3 + I_3 \otimes \mathbb{I}$ a $Y^\otimes = \mathbb{I} \otimes Y + Y \otimes \mathbb{I}$, tj. rozepsáním

$$I_3^\otimes = \frac{1}{2} \text{diag}(2, 0, 1, 0, -2, -1, 1, -1, 0), \quad Y^\otimes = \frac{1}{3} \text{diag}(2, 2, -1, 2, 2, -1, -1, -1, -4). \quad (9.11)$$

Analýzou vlastních čísel a vektorů dostáváme

$$\begin{aligned} \left(-1, \frac{2}{3}\right) : \{|dd\rangle\}, \quad \left(1, \frac{2}{3}\right) : \{|uu\rangle\}, \quad \left(0, \frac{2}{3}\right) : \{|ud\rangle, |du\rangle\}, \quad \left(0, -\frac{4}{3}\right) : \{|ss\rangle\}, \\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) : \{|us\rangle, |su\rangle\}, \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) : \{|ds\rangle, |sd\rangle\}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

kde první číslo je vlastní číslo $I_3^\otimes$, druhé je vlastní číslo $Y^\otimes$. Výsledky už jen vyneseme do grafu dle pokynů.

Pro reprezentaci $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ zavedeme analogicky bázi pomocí tenzorových součinů vektorů základní báze a definujeme opět rozšíření $I_3^\otimes \equiv \mathbb{I} \otimes I_3 \otimes \mathbb{I} + I_3 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes I_3$ a $Y^\otimes \equiv \mathbb{I} \otimes Y \otimes \mathbb{I} + Y \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes Y$ tj.

$$\begin{aligned} I_3^\otimes &= \frac{1}{2} \text{diag}(3, 1, 2, 1, -1, 0, 2, 0, 1, 1, -1, 1, 0, -1, -3, -2, 0, -2, -1, 2, 0, 1, 0, -2, -1, 1, -1, 0), \\ Y^\otimes &= \frac{1}{3} \text{diag}(3, 3, 0, 3, 3, 0, 0, 0, -3, 3, 3, 0, 3, 3, 0, 0, 0, -3, 0, 0, -3, 0, 0, -3, -3, -3, -6). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Příslušné kombinace vlastních čísel a vektorů (první číslo odpovídá vlastnímu číslu I_3 , druhé vlastnímu číslu Y , v zápisu pomocí kombinací u, d, s jsou skryty vlastní vektory) jsou:

$$\begin{aligned} \Delta^- &:= |-\frac{3}{2}, 1\rangle \equiv |ddd\rangle, \Delta^0 := |-\frac{1}{2}, 1\rangle \equiv |dud\rangle, \Delta^+ := |\frac{1}{2}, 1\rangle \equiv |ud\rangle, \Delta^{++} := |\frac{3}{2}, 1\rangle \equiv |uuu\rangle, \\ \Sigma^{*-} &:= |-1, 0\rangle \equiv |dds\rangle, \Sigma^{*0} := |0, 0\rangle \equiv |uds\rangle, \Sigma^{*+} := |1, 0\rangle \equiv |uus\rangle, \\ \Xi^{*-} &:= |-\frac{1}{2}, -1\rangle \equiv |sds\rangle, \Xi^{*0} := |\frac{1}{2}, -1\rangle \equiv |sus\rangle, \Omega^- := |0, -2\rangle \equiv |sss\rangle, \end{aligned} \quad (9.14)$$

kde značení nalevo odpovídá standardnímu označení příslušných částic v částicové fyzice. Nyní stačí vynést do grafu dle pokynů.

Cvičení 35. Parametry Cabibbo-Kobayashi-Maskawovy matice.

Kolik parametrů má množina unitárních matic $N \times N$, jejichž řádky a sloupce můžeme násobit libovolnými komplexními fázemi?

Řešení:

Zavedeme relaci ekvivalence

$$U \sim U' \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N : U' = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\alpha_N} \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\beta_N} \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

a ptáme se na počet spojitých parametrů množiny $U(N)/\sim$.

Výsledek je

$$N^2 - (2N - 1). \quad (9.16)$$

Pro $N = 3$ tedy obdržíme $9 - 5 = 4$ parametry.

Kapitola 10

Poruchový rozvoj a renormalizace

10.1 Matice rozptylu a Feynmanovy diagramy

Fyziku mikrosvěta obvykle zkoumáme pomocí rozpadových a rozptylových experimentů. V těchto procesech je počáteční (iniciální) kvantový stav $|i\rangle$ charakterizován čtyřhybnostmi vstupujících částic: p_A pro rozpadající se částici, resp. p_A a p_B pro srážející se částice. Interakce částic je popsána unitárním operátorem $\hat{S}$, jenž shrnuje časový vývoj systému během daného procesu a poskytuje nám výsledný kvantový stav $\hat{S}|i\rangle$. Při měření tento stav zkolabuje do určitého koncového (finálního) stavu $|f\rangle$, který odpovídá určitému množství částic určitých typů a s určitými čtyřhybnostmi $p_1, \dots, p_n$.

Podle zákonů kvantové mechaniky je pravděpodobnost naměření koncového stavu $|f\rangle$ dána jako

$$|S_{fi}|^2, \quad \text{kde} \quad S_{fi} = \langle f | \hat{S} | i \rangle \quad (10.1)$$

jsou tzv. **amplitudy rozptylu** (angl. „scattering amplitudes“), které jsou komponentami **matice rozptylu** (S_{fi}). (Slovo „matice“ je zde třeba chápat v poněkud obecnějším smyslu, neboť indexy i a f v sobě zahrnují kompletní charakteristiky počátečního a koncového stavu — hybnosti všech zúčastněných částic, popř. i jejich spinové stavy.) Z matice rozptylu je pak možné vyčíst (diferenciální) účinné průřezy a (diferenciální) rozpadové šířky uvažovaných procesů.

Výpočet matice rozptylu je základním úkolem kvantové teorie pole. Její konkrétní podoba samozřejmě závisí na zvoleném modelu, tedy lagrangiánu $\mathcal{L}$. Přesný analytický tvar ovšem obvykle není možné najít. Je třeba se proto uchýlit k přibližným poruchovým metodám, které si nyní v hrubých obrysech nastíníme.

Jako konkrétní příklad uvažujme lagrangián interagujícího skalárního pole

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2}_{\mathcal{L}_0} - \underbrace{\frac{\lambda}{4!}\phi^4}_{\mathcal{L}_I}. \quad (10.2)$$

Jeho *volná část* (kvadratická v poli a jeho derivacích) odpovídá lineární pohybové rovnici

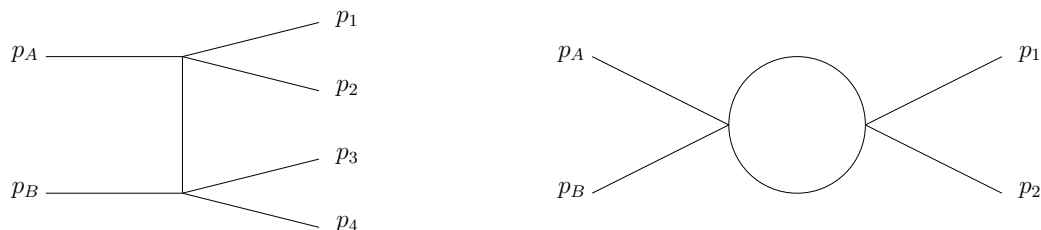
$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \phi)} = -(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (10.3)$$

jejímž fundamentálním řešením (Greenovou funkcí) je tzv. **Feynmanův propagátor** $G_F(x-y)$ splňující rovnici

$$-(\square_x + m^2)G_F(x-y) = \delta^{(4)}(x-y), \quad \text{tj. ve Fourierově obraze} \quad (p^2 - m^2)\tilde{G}_F(p) = 1, \quad (10.4)$$

kde $G_F(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_F(p) e^{-ip \cdot x}$.

Interakční část lagrangiánu $\mathcal{L}_I$ považujeme za poruchu (předpokládáme tedy, že je malá ve srovnání s volnou částí). **Feynmanovy diagramy** jsou grafickým znázorněním poruchového rozvoje rozptylových amplitud S_{fi} uvažovaného procesu (viz Obr. 10.1). Vnější nožičky odpoví-



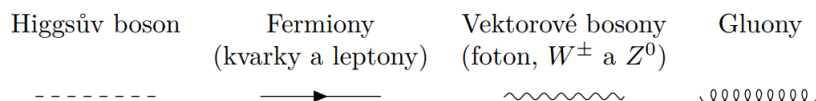
Obrázek 10.1: Feynmanovy diagramy v teorii s lagrangiánem (10.2). Vlevo stromový diagram, vpravo diagram s jednou uzavřenou smyčkou.

vídají vstupujícím částicím počátečního stavu $|i\rangle$ a vystupujícím částicím koncového stavu $|f\rangle$; vnitřní linky (hrany) představují Feynmanovy propagátory $\tilde{G}_F$; a vrcholy (vertexy) grafu odpovídají interakcím, jejichž velikost je úměrná interakční konstantě (λ v případě lagrangiánu (10.2)). Amplituda S_{fi} je dána součtem všech diagramů s fixními vnějšími nožičkami. Daný diagram představuje matematický výraz, který je součinem interakčních konstant (za každý vrchol) a propagátorů (za každou vnitřní linku). Přitom v každém vrcholu platí zákon zachování čtyřhybnosti a rovněž platí i zákon zachování celkové čtyřhybnosti uvažovaného procesu:

$$p_i = p_f, \quad \text{kde} \quad p_i = p_A + p_B + \dots \quad \text{a} \quad p_f = p_1 + p_2 + \dots \quad (10.5)$$

Tyto zákony zachování v případě tzv. *stromových diagramů* (tj. diagramů bez uzavřených smyček — viz Obr. 10.1 vlevo) jednoznačně určují čtyřhybnosti odpovídající vnitřním linkám (po nichž se „propagují“ tzv. *virtuální částice*). V případě diagramů se smyčkami (viz Obr. 10.1 vpravo) nejsou hybnosti virtuálních částic fixovány, nýbrž je přes ně integrováno. Tím vznikají divergentní *smyčkové integrály*, které v raných fázích kvantové teorie pole nadělaly fyzikům mnoho vrásek na čele. Systematickým řešením těchto problémů je tzv. technika **renormalizace**.

Lagrangián standardního modelu částicové fyziky je poměrně komplikovanou funkcí, ve které vystupují různé typy polí odpovídající elementárním částicím. Z volné (kvadratické) části lagrangiánu je možné vyčíst propagátory jednotlivých částic (viz Obr. 10.1), z interakční části pak vyčteme interakční vrcholy, kde se částice ve Feynmanových diagramech potkávají, a příslušné interakční konstanty.



Obrázek 10.2: Grafické znázornění Feynmanových propagátorů standardního modelu.

10.2 Renormalizace

Již od konce 19. století se lidé ptali, kde se bere hmotnost elektronu a co do ní přispívá. Představíme-li se jej totiž jako malou nabitou sféru o poloměru a , je energie elektrického pole jím buzeného dána vztahem $U = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$, kde e je elementární náboj (viz Cvičení 36). Pokud bychom celou klidovou hmotnost elektronu $m_e \doteq 0,5 \text{ MeV}$ ztotožnili s jeho *elektromagnetickou hmotností* podle relativistického vztahu $U = m_e c^2$, dostáváme pro poloměr elektronu

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} = m_e c^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2} = \frac{\alpha \hbar}{2m_e c}, \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \doteq \frac{1}{137} \quad (10.6)$$

je (bezrozměrná) tzv. *konstanta jemné struktury*. Veličina $r_e = 2a \doteq 2,8 \times 10^{-15} \text{ m}$ se nazývá *klasický poloměr elektronu*.

Stejně tak si ovšem můžeme představit, že elektron má jistou vlastní „nahou hmotnost“ (angl. „bare mass“) m_0 a jeho celková hmotnost, kterou měříme v experimentech, je dána součtem $m_e = m_0 + \frac{U}{c^2}$. V limitě bodového náboje, $a \rightarrow 0$, roste elektromagnetická část hmotnosti do $+\infty$ a pokud má být pozorovaná hmotnost m_e konstantní, musí se „bare“ hmotnost m_0 blížit k $-\infty$. To je sice obtížně představitelné, nicméně z matematického hlediska možné. Pojem hmotnosti nabitě částice každopádně není triviální vzhledem k její inherentní interakci s elektromagnetickým polem. (Náboj nelze od elektronu oddělit a změřit pouze jeho „bare“ hmotnost m_0 .)

Další příklad ukazuje, že i náboj částice nemusí být absolutní pojem. Jde o fenomén tzv. *screeningu* v plazmatu, kdy se kolem částice s nábojem Q vytvoří opačně nabitý oblak a tím se její elektrostatický potenciál efektivně zmenší na

$$\phi(r) = \frac{Q_{\text{eff}}(r)}{4\pi\epsilon r}, \quad \text{přičemž} \quad Q_{\text{eff}}(r) = Q e^{-\frac{r}{\lambda_D}}, \quad (10.7)$$

kde λ_D je tzv. *screeningová vzdálenost*, za kterou se už náboj jeví téměř jako nulový (viz Cvičení 37). Náboj Q má vlivem screeningu efektivní hodnotu Q_{eff} , jež závisí na vzdálenosti, ze které je částice v plazmatu „pozorována“.

Ani pro samostatný elektron není otázka jeho náboje triviální. V kvantové teorii pole totiž kolem něho neustále vznikají a zanikají elektron-pozitronové páry a tento „oblak virtuálních částic“ opět způsobuje změnu efektivní hodnoty náboje. Vyjmout elektron z kvantového vakua a zjistit jeho „skutečný“ náboj však není experimentálně možné. Musíme se tedy spokojit s tím, že náboj elektronu není absolutní pojem, ale závisí na okolnostech, konkrétně na energetické škále, na které provádíme daný experiment. Vyšší energie odpovídají v kvantové teorii kratším vlnovým délkám a tedy přesnější lokalizaci, díky níž pronikáme oblakem virtuálních částic blíže k samotnému elektronu.

Tím se dostáváme k pojmu **renormalizace** v kvantové teorii pole. Jedná se o soubor technik, které umožňují konzistentně se vypořádat s divergencemi smyčkových Feynmanových diagramů a jejichž výsledkem jsou předpisy pro závislost fyzikálních konstant (např. hmotností částic, nábojů, vazbových konstant) na energetické škále μ uvažované kvantově-polní teorie. Konkrétní model kvantové teorie pole (tedy soubor polí popsany určitým lagrangiánem $\mathcal{L}$) může být tzv. renormalizovatelný či nikoliv. Nerenormalizovatelné teorie jsou obvykle vnímány jako patologické a tedy nevhodné z hlediska využití ve fundamentální fyzice. (Mohou však sloužit jako efektivní teorie platné na určité energetické škále.)

Odvození příslušných renormalizačních rovnic je předmětem pokročilých partií kvantové teorie pole. Shrňme si alespoň některé z výsledků. V **kvantové elektrodynamice** je závislost vazbové konstanty (tj. elementárního náboje) e na energetické škále μ dána rovnicí

$$\mu \frac{de}{d\mu} = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{-2} = \frac{1}{12\pi^2} \ln \mu + C \quad \rightarrow \quad e^2(\mu) = \frac{e^2(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{6\pi^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}}, \quad (10.8)$$

kde μ_0 je libovolná referenční škála. Můžeme uvažovat například $\mu_0 = m_e c^2$ relevantní pro rozptyl pomalých (nerelativistických) elektronů. Teorie renormalizace pak dává předpověď, jak elementární náboj „teče“ s energetickou škálou. Rozdíl $e(\mu) - e(\mu_0)$ se někdy nazývá *radiativní korekcí* elektrického náboje.

Všimněme si, že pravá strana výsledného vztahu (10.8) připouští pro dostatečně vysoké energie až nekonečnou hodnotu náboje e . Má totiž singularitu (tzv. *Landauův pól*) pro

$$\mu = \mu_0 \exp\left(\frac{6\pi^2}{e^2(\mu_0)}\right) = \mu_0 \exp\left(\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_0)}\right) \doteq \mu_0 e^{645}, \quad (10.9)$$

kde jsme použili vztah (10.6) pro konstantu jemné struktury v přirozených jednotkách $\hbar = c = \varepsilon_0 = 1$ a její referenční hodnotu $\alpha(\mu_0) = 1/137$. Tato singularita je však zcela bezpečně daleko za jakýmkoliv energiemi, které ve fyzice uvažujeme.

V **kvantové chromodynamice**, tedy v $SU(3)$ kalibrační teorii silných interakcí, je závislost silné vazbové konstanty g_s na škále řízena rovnicí

$$\mu \frac{dg_s}{d\mu} = -\frac{g_s^3}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3}N_f\right) \quad \rightarrow \quad g_s^2(\mu) = \frac{g_s^2(\mu_0)}{1 + \frac{g_s^2(\mu_0)}{8\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3}N_f\right) \ln \frac{\mu}{\mu_0}}, \quad (10.10)$$

kde N_f udává počet flavorů (tedy typů) kvarků. Pokud $11 - \frac{2}{3}N_f > 0$, tak jako je tomu pro $N_f = 6$ kvarků standardního modelu, blíží se interakční konstanta $g_s(\mu)$ pro vysoké energie (ekvivalentně malé vzdálenosti) k nule. Tento důležitý rys silných interakcí, nazývaný **asymptotická volnost**, objevili v roce 1973 fyzikové Gross, Wilczek a Politzer. V jejím důsledku se kvarky při malých vzdálenostech chovají jako volné, avšak se zvyšující se vzdáleností jejich vzájemná interakce narůstá. To vede k jejich „uvěznění“ (angl. „confinement“) v hadronech a samostatné kvarky se proto za normálních okolností nepozorují.

10.3 Cvičení

Cvičení 36. *Klasický poloměr elektronu.*

Určete elektrostatickou energii sféry o poloměru a nabité nábojem $q = -e$.

Řešení:

Představme si elektron v klasické elektrodynamice jako sféru o poloměru a nesoucí náboj $q = -e$. Coulombovo elektrostatické pole a jeho celková energie jsou dány jako

$$E(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \rightarrow \quad U = \int_{|\mathbf{x}|>a} d^3x \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \int_a^\infty dr \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}. \quad (10.11)$$

(Elektrické pole uvnitř sféry je nulové a tato oblast tedy k celkové energii nepřispívá.)

Cvičení 37. *Screening elektrického náboje v plazmatu.*

Uvažujte systém elektronů a iontů s náboji $q_e = -e$, resp. $q_i = +e$, a lokálními koncentracemi $n_e(\mathbf{r})$, resp. $n_i(\mathbf{r})$.

1. Kombinací Poissonovy rovnice elektrostatiky a Boltzmannova termodynamického rozdělení odvoďte diferenciální rovnici pro elektrostatický potenciál $\phi(\mathbf{r})$,

$$\epsilon \Delta \phi(\mathbf{r}) = - \sum_{s=e,i} q_s \bar{n}_s \exp\left(-\frac{q_s \phi(\mathbf{r})}{k_B T}\right) \quad (10.12)$$

2. Uvažujte elektricky neutrální systém a přiblížení vysokých teplot a zredukujte rovnici (10.12) na lineární diferenciální rovnici

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_D^2} \phi(\mathbf{r}), \quad \text{kde} \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon k_B T}{(\bar{n}_e + \bar{n}_i) e^2}} \quad (10.13)$$

je tzv. *Debyeova stínící délka*. Nalezněte sféricky symetrické řešení této rovnice.

Řešení:

1. Gaussův zákon elektrostatiky, $\text{div } \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\epsilon}$ (kde ϵ je elektrická permitivita prostředí), má v řeči elektrostatického potenciálu ϕ tvar Poissonovy rovnice

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon} \sum_{s=e,i} q_s n_s. \quad (10.14)$$

Boltzmannovo rozdělení dává vztah pro koncentrace

$$n_s(\mathbf{r}) = \bar{n}_s \exp\left(-\frac{q_s \phi(\mathbf{r})}{k_B T}\right), \quad (10.15)$$

kde konstanty $\bar{n}_s$ jsou střední hodnoty koncentrací. Jednoduchým dosazením dostáváme rovnici (10.12).

2. Pro elektricky neutrální systém platí $\bar{n}_e = \bar{n}_i$. Rozvojem exponenciály do prvního řádu pak získáváme rovnici (10.13). V případě sférické symetrie má Laplaceův operátor tvar

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\phi(r)) \quad (10.16)$$

a (10.13) přechází na rovnici

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi(r)) = \frac{1}{\lambda_D^2} r\phi(r), \quad \text{s obecným řešením} \quad r\phi(r) = A e^{\frac{r}{\lambda_D}} + B e^{-\frac{r}{\lambda_D}}. \quad (10.17)$$

Potenciál ubývající v nekonečnu k nule má tedy tvar tzv. *Yukawova potenciálu*

$$\phi(r) = \frac{Q e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}{4\pi\epsilon r}. \quad (10.18)$$

(Ten v limitě $\lambda_D \rightarrow 0$ přechází na obyčejný Coulombův potenciál.)

Kapitola 11

Shrnutí standardního modelu

Současný obraz fyziky mikrosvěta je shrnut ve **Standardním modelu částicové fyziky**. Z technického hlediska se jedná o lagrangián kvantové teorie pole, který obsahuje pole skalárního, spinorového a vektorového typu odpovídající elementárním částicím. Volná část lagrangiánu definuje propagátory jednotlivých částic, zatímco interakční část nese informaci o jejich vzájemných interakcích. Standardní model je invariantní vůči translacím a Lorentzovým transformacím (jedná se o speciálně relativistickou teorii) a vůči lokálním kalibračním transformacím grupy $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ působící na vnitřním polním prostoru. Odpovídající neabelovská Yang-Millova kalibrační teorie popisuje

- **silnou interakci** mezi **kvarky** $\begin{smallmatrix} u & c & t \\ d & s & b \end{smallmatrix}$, zprostředkovanou 8 **gluony**;
- **elektroslabou interakci** mezi **kvarky** a **leptony** $\begin{smallmatrix} e & \mu & \tau \\ \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \end{smallmatrix}$, zprostředkovanou **fotonem** a intermediálními **vektorovými bosony** $W^\pm, Z^0$.

Leptony a kvarky jsou fermiony se spinem $1/2$, jež jsou zorganizovány do tří generací. Jejich hmotnost, jakož i hmotnost intermediálních bosonů, má původ v interakci se skalárním **Higgsovým bosonem** H .

Dá se ukázat, že Standardní model je jediná renormalizovatelná teorie s daným částicovým obsahem a danými symetriemi. Má celkem 19 nezávislých parametrů, jež jsou určeny na základě experimentů: 10 hmotností částic (3 leptony, 6 kvarků a 1 Higgsův boson), vazbové konstanty g' a g (za elektroslabou interakci) a g_s (za silnou interakci), 4 parametry Cabibbo-Kobayashi-Maskawovy matice, vakuovou střední hodnota Higgsova pole v a konečně úhel CP narušení v kvantové chromodynamice θ_{QCD} (jehož podrobnější vysvětlení jde nad rámec této přednášky).

Počet 19 parametrů Standardního modelu předpokládá, že bereme neutrina jako nehmotná. Experimentálně se však ukazuje, že neutrina mají nenulovou hmotnost ($\lesssim 0,1$ eV) a to na základě fenoménu tzv. **neutrinových oscilací**. Zjistilo se, že neutrina ν_e, ν_μ, ν_τ periodicky mění svou identitu (viz Cvičení 38). Například, neutrina vznikající ve Slunci jsou výhradně elektronová (muony a tauony se ve Slunci vzhledem ke své relativně vysoké hmotnosti, 106 MeV resp. 1777 MeV, neprodukují), na Zemi měřený tok je však tvořen elektronovými neutrinami pouze z jedné třetiny. Neutrina interagují pouze slabě (skrze slabou interakci) a jejich detekce je tak poměrně obtížná. Největší neutrinový detektor IceCube se nachází pod jižním pólem. Tvoří ho 1 km^3 antarktického ledu provrtaný trubicemi se senzory.

Finální verifikaci standardního modelu byl objev Higgsova bosonu v proton-protonových srážkách na urychlovači LHC v CERNu v roce 2012, kde jeho existenci potvrdily dva nezávislé

detektory ATLAS a CMS.

Na závěr této kapitoly si shrňme celkový lagrangián standardního modelu:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa}. \quad (11.1)$$

Zde,

- $\mathcal{L}_{gauge}$ zahrnuje kinetické členy a případně samointerakce kalibračních polí W_μ, Z_μ, A_μ a gluonových polí A_μ^a (viz rovnice (6.16) a Cvičení 31);
- $\mathcal{L}_{fermion}$ popisuje dynamiku diracovských polí leptonů a kvarků a jejich (minimální) interakci s kalibračními poli (viz kapitola 6 a kapitola 7.2);
- $\mathcal{L}_{Higgs}$ popisuje dynamiku Higgsova pole vedoucí ke spontánnímu narušení symetrie a generaci hmot intermediálních vektorových bosonů $W^\pm$ a Z^0 (viz kapitola 8.2 a rovnice (8.16));
- $\mathcal{L}_{Yukawa}$ udává interakci Higgsova pole s leptony a kvarky, jež po spontánním narušení symetrie vede ke generaci hmot těchto částic (viz kapitola 8.3 a rovnice (9.4)).

11.1 Cvičení

Cvičení 38. *Oscilace dvou neutrin.*

Uvažujte dva typy (flavory) neutrin, např. elektronové ν_e a mionové ν_μ , spojené s *hmotnostní bází* neutrinového prostoru (ν_1, ν_2) ortogonální transformací

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

S jakou pravděpodobností naměříme mionové neutrino ve vzdálenosti L od zdroje, ve kterém vznikají neutrina elektronová. (Uvažujte ultrarelativistický režim.)

Řešení:

Hmotnostní vlastní stavy s hybností p , $|\nu_j\rangle$ ($j = 1, 2$), se v čase vyvíjejí jako

$$|\nu_j(t)\rangle = e^{-iE_j t} |\nu_j(0)\rangle, \quad \text{kde} \quad E_j = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_j^2} \approx |\mathbf{p}| + \frac{m_j^2}{2|\mathbf{p}|}. \quad (11.3)$$

Zajímá nás amplituda pravděpodobnosti

$$\langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle = \left(-\sin \theta \langle \nu_1 | + \cos \theta \langle \nu_2 | \right) \left(\cos \theta |\nu_1(t)\rangle + \sin \theta |\nu_2(t)\rangle \right) = \sin \theta \cos \theta (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}). \quad (11.4)$$

Pravděpodobnost je pak dána jako

$$|\langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle|^2 = \frac{\sin^2 2\theta}{4} (2 - e^{-it\Delta E} - e^{it\Delta E}) = \frac{\sin^2 2\theta}{2} (1 - \cos(t\Delta E)) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{t\Delta E}{2} \right), \quad (11.5)$$

kde jsme využili vzorec $\frac{1-\cos x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$.

V ultrarelativistické limitě zanedbatelných klidových hmotností je $|\mathbf{p}| \approx E \equiv \frac{E_1 + E_2}{2}$ a pro pravděpodobnost přeměny elektronového neutrina na mionové na vzdálenosti $L = t$ (v přírodních jednotkách $c = 1$) tak můžeme psát

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; L) \approx \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{L \Delta m^2}{4E} \right), \quad \text{kde} \quad \Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2. \quad (11.6)$$

Všimněme si, že pro $\Delta m^2 = 0$ by k neutrinovým oscilacím nedocházelo.

Poznámky:

Oscilující neutrina je možné si intuitivně představit jako klasický systém dvou sprzęžených kyvadel. Jednotlivé souřadnice odpovídají jednotlivým neutrinovým typům ν_e a ν_μ , zatímco normální módy představují hmotnostní stavy ν_1 a ν_2 s odlišnými vlastními frekvencemi. Energie systému se periodicky přelévá z jednoho kyvadla na druhé, tak jako se mění typ neutrina.

Kapitola 12

Za standardním modelem

12.1 Velké sjednocení

Ve standardním modelu s kalibrační grupou $G_{SM} = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ máme tři vazbové konstanty odpovídající jednotlivým faktorům: g' , g a g_s . Při studiu jejich renormalizačních toků je možné si povšimnout, že na energetické škále 10^{16} GeV se jejich hodnoty přibližně vyrovnávají. (K přesnému vyrovnání dojde, přijmeme-li myšlenku **supersymetrie**, tj. existenci bosonových partnerských částic ke každému elementárnímu fermionu, a naopak, která však nemá oporu v experimentech.) To vedlo fyziky k úvaze, že při takto vysokých energiích by tři fundamentální síly standardního modelu — elektromagnetická, slabá a silná — mohly být sjednoceny v jedinou sílu charakterizovanou jedinou interakční konstantou. Teorie, které tuto myšlenku implementují se obecně nazývají **teorie velkého sjednocení** (angl. „grand unified theories” — GUT). Jedná se opět o neabelovské kalibrační teorie, jejichž kalibrační grupa G_{GUT} obsahuje G_{SM} jako svoji podgrupu.

Nejjednodušší taková teorie, navržená v roce 1974 fyziky Georgim a Glashowem, pracuje s grupou $G_{GUT} = SU(5)$ působící na reprezentačním prostoru, který sestává z celé jedné generace fermionů standardního modelu, tj. např. z leptonů e a ν_e a kvarků u a d ve třech barevných variantách. Problémem však je, že tato symetrie mezi leptony a kvarky vede k procesům, které nezachovávají baryonové číslo, konkrétně k předpovědi **rozpadu protonu**, jež je v rozporu s experimentálně pozorovanou stabilitou protonu. Takovým procesem je například $p \rightarrow e^+ + \pi^0$, při kterém z jednoho baryonu (p) vzniká lepton (e^+) a mezon (π^0).

V současnosti je nejžhavějším kandidátem na teorii velkého sjednocení teorie založená na grupě $G_{GUT} = SO(10)$. Ta se dokáže vyhnout problémům s rozpadem protonu a navíc správně zahrnuje nenulové hmotnosti neutrin. Leptony vystupují jako jakási čtvrtá barevná verze kvarků.

12.2 Temná hmota

Uvažujme sféricky symetrické rozložení hmoty, které představuje zjednodušený model galaxie (ta má však ve skutečnosti tvar disku). Pro rychlost v testovací částice (hvězdy) pohybující se po kruhové orbitě o poloměru r dává Newtonův gravitační zákon vztah

$$\frac{v^2(r)}{r} = a = \frac{GM(r)}{r^2} \quad \rightarrow \quad v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, \quad (12.1)$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta a $M(r)$ celková hmotnost uvnitř sféry o poloměru r .

Uvažujeme-li pouze viditelnou část galaxie, kterou aproximujeme jako sféru o poloměru R_L a hustotě ρ_L , dostaneme závislost rychlosti oběhu na vzdálenosti od středu galaxie (tzv. **rotační křivku**)

$$v_L(r) = v_L(R_L) \times \begin{cases} \frac{r}{R_L} & (r \leq R_L) \\ \frac{\sqrt{R_L}}{\sqrt{r}} & (r \geq R_L) \end{cases}, \quad \text{kde} \quad v_L(R_L) \equiv \sqrt{\frac{4\pi G \rho_L R_L^2}{3}}. \quad (12.2)$$

Experimentálně lze rychlost obíhajících objektů určit pomocí dopplerovského posuvu a ukazuje se, že na větších vzdálenostech rychlost neklesá, nýbrž zůstává zhruba konstantní. Měření ukazují zásadní rozpor se standardní představou o hmotnostním složení galaxií — jen asi 15% hmoty tvoří běžně pozorované částice (protony, neutrony, elektrony) a z nich složené objekty. Zbýlých 85% hmoty ve Vesmíru tvoří tzv. **temná hmota** (angl. „dark matter”), která se projevuje gravitačně, avšak neprodukuje elektromagnetické záření.

Další pozorování se týkají vzájemného pohybu galaxií v galaktických clusterech či efektu **gravitačního čočkování**, při kterém hmota díky svému gravitačnímu působení ohýbá světelné paprsky. To vede na zkreslení pozorovaných objektů, z čehož můžeme usuzovat na rozložení hmoty ve Vesmíru.

Temná hmota, coby nesporný experimentální fakt, je zřejmě největší záhadou současné fyziky. Třebaže existuje celá řada hypotéz objasňující její identitu a původ, žádná se zatím neprokázala. Jedním druhem vysvětlení je, že temná hmota je tvořena částicemi mimo standardní model. Často se uvažuje *slabě interagující hmotná částice* (zkratka **WIMP**) s hmotností okolo elektroslabé škály, tj. ~ 100 GeV.

Dalším kandidátem na temnou hmotu jsou **primordiální černé díry** vzniknuvší v raných fázích Vesmíru. Vzhledem k mechanismu **Hawkingova vypařování** černých děr by ale v rámci klasické teorie gravitace těžko obstály. V rámci kvantové teorie gravitace by se však nevypařily úplně, nýbrž by z nich zůstaly relikty o hmotnosti zhruba $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} \doteq 2 \times 10^{-5}$ g (tzv. *Planckova hmotnost*).

Existují i úvahy, že efektů temné hmoty by se dalo dosáhnout modifikací samotného Newtonova gravitačního zákona na galaktických vzdálenostech. Samozřejmě je i možné, že správná teorie temné hmoty je kombinací výše zmíněných (či něčeho úplně jiného).

Kapitola 13

Urychlovače a detektory

13.1 Urychlovače částic

Hmota kolem nás je složená z elektronů, protonů a neutronů. Exotičtější částice vznikají při dostatečně vysokých energiích. Jejich přirozeným zdrojem jsou vysoce-energetické elektrony a protony (popř. jádra dalších prvků), které k nám přilétávají z Vesmíru — tzv. **kosmické záření** detekované Hessem v roce 1912 v horkovzdušném balónu. Jejich nárazem do zemské atmosféry vznikají spršky sekundárních částic, mezi nimiž byl objeven například pozitron (1932) či mion (1937).

Kontrolovanou produkci vysoko-energetických částic umožňují částicové urychlovače, v nichž se kinetická energie nabitých částic zvyšuje pomocí elektrických polí a tvar trajektorií je kontrolován poli magnetickými. K urychlení slouží tzv. *radiofrekvenční (RF) dutiny*, v nichž vzniká stojatá elektromagnetická vlna, která svazek částic urychluje v podélném směru a zároveň jej drží pohromadě (rychlejší částice jsou urychleny méně, pomalejší více). Ohyb trajektorie svazku způsobují dipólové magnety, zatímco kvadrupólové magnety fokusují svazek v příčném směru (svazek je tvořen shodně nabitými částicemi, které se neustále odpuzují).

Urychlovače jsou buď lineární nebo kruhové. **Lineární** design je jednodušší, ale k urychlení částic dochází pouze jednorázově. (Nejvýkonnějším lineárním urychlovačem je SLAC v Kalifornii, kde elektrony dosahují energie 50 GeV.)

U kruhového urychlovače je třeba využít kolmého magnetické pole k zajištění kruhové trajektorie částic, které pak jsou urychlovány opakovaně při každém průchodu. **Cyklotron** je relativně kompaktní zařízení, jehož magnetické pole B je konstantní a tím pádem se poloměr trajektorie s rostoucí energií částic zvyšuje. Frekvence kruhového pohybu, tzv. *cyklotronová frekvence*

$$\omega_c = \frac{qB}{\gamma m}, \quad \text{kde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (13.1)$$

q je náboj a m klidová hmotnost částic, závisí na energii částic pouze skrze relativistický faktor γ (viz Cvičení 12). Frekvenci urychlujícího elektrického pole v RF dutině tedy není třeba výrazně měnit. Cyklotrony sice nedosahují příliš vysokých energií (maximálně stovky MeV), ale díky své dostupnosti jsou využívány v praktických aplikacích, například v protonové terapii.

Nejvyšších energií dosahují kruhové urychlovače prstencového tvaru, tzv. **synchrotrony**, v nichž se částice pohybují po kružnici stálého poloměru. Se zvyšující se kinetickou energií je tedy třeba odpovídajícím způsobem zvyšovat (*synchronizovat*) intenzitu magnetického pole. To vyžaduje silné supravodivé elektromagnety, v případě nejvýkonnějšího světového synchrotronu LHC

(Large Hadron Collider) ve švýcarském CERNu až 8 T, schlazené na teplotu 2 K. Částice při kruhovém pohybu vyzařují elektromagnetické *synchrotronové záření* a tím naopak energii ztrácejí. Synchrotronové záření se ale dá i využít, a to jako zdroj mimořádně kvalitního rentgenového záření pro difrakční studium materiálů a makromolekul (čím kratší vlnová délka, tím větší detaily můžeme pozorovat).

Pro srážku dvou částic (pro jednoduchost se stejnou klidovou hmotností m) je celková energie v těžištové soustavě dána Mandelstamovým invariantem jako $E_{cm} = \sqrt{s}$ (viz rovnice (2.23)). Pro rozptýl svazku (A) na **pevném terči** (B) je v laboratorní soustavě

$$p_A = (E_A, \mathbf{p}_A), \quad p_B = (m, \mathbf{0}) : \quad s = 2m^2 + 2mE_A \approx 2mE_A, \quad (13.2)$$

kde jsme v posledním kroku provedli aproximaci vysokých energií, $E_A \gg m$. Oproti tomu, pro srážku dvou **protiběžných svazků** (A a B) máme

$$p_A = (E_A, \mathbf{p}), \quad p_B = (E_B, -\mathbf{p}) : \quad s = (E_A + E_B)^2 = 4E_B^2, \quad (13.3)$$

jelikož $E_A = E_B$ díky stejným klidovým hmotnostem. Tzv. *head-on* kolize protiběžných svazků tedy produkují mnohem vyšší energie a umožňují tak vznik těžších, exotičtějších částic. LHC v proton-protonových srážkách dosahuje energie $\sqrt{s_{LHC}} = 13,6$ TeV. U protonů kosmického záření, které interagují s „pevným terčem“ atomů vzduchu, by tomu odpovídala energie $E_A = \frac{s_{LHC}}{2m_p} \doteq 10^5$ TeV. Kosmické záření dosahuje dokonce vyšších energií, až 10^8 TeV, což odpovídá $\sqrt{s_{CR}} = 400$ TeV.

Jednou věcí je energie srážek, druhou však jejich četnost. Tu určuje veličina zvaná **luminozita** $\mathcal{L}$ (krát účinný průřez σ). Svazky jsou obvykle sekvencí mnoha pulzů. Je-li f frekvence pulzů, S průřez svazku a $N_{A,B}$ počet částic v pulzu (popřípadě v terčíku), je luminozita dána vztahem (viz formule (2.20) pro účinný průřez σ)

$$\mathcal{L} = f \frac{N_A N_B}{S}, \quad \text{a tedy} \quad \sigma \mathcal{L} = \text{četnost srážek.} \quad (13.4)$$

Maximální luminozita LHC je $\mathcal{L}_{LHC} \sim 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. U kosmického záření je právě luminozita hlavní překážkou v jeho praktickém využití pro částicové experimenty. Pro energie srovnatelné s LHC totiž činí pouhých $\mathcal{L}_{CR} \sim 10^7 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

13.2 Detekce částic

Geiger-Müllerův čítač (1908) je trubice s inertním plynem, který se při průchodu částic α , β nebo γ -záření ionizuje. Elektrické napětí mezi anodou (středovým drátkem) a katodou (plášťem trubice) způsobí urychlení elektronů a iontů, které dále narážejí do atomů plynu a způsobí tak ionizační lavinu registrovanou jako elektrický proud. Výsledný signál nezávisí na počáteční energii ani na typu částice.

Wilsonova **mlžná komora** (1911) obsahuje podchlazenou páru, která v místě, kde je ionizována detekovanou částicí, kondenzuje a vytváří tak viditelnou kondenzační stopu. α -částice mají stopu kratší a tlustší než lehčí elektrony a pozitrony. Ty navíc můžeme od sebe odlišit směrem ohybu trajektorie v magnetickém poli. Miony jsou mnohem těžší než elektrony a jejich stopy jsou tak prakticky rovné.

Slabou stránkou mlžné komory je fakt, že plyn je poměrně řídké médium, se kterým zreaguje jen malý zlomek nalétávajících částic. **Bublinková komora**, vynalezená Glaserem v roce 1952, je obdoba mlžné komory tvořená kapalinou (ta je 1000x hustší než plyn) zahrátou těsně pod bod varu. Mírným snížením tlaku se dostává do metastabilní fáze, kdy se podél ionizační dráhy

částice vytvoří bublinky plynu. Bublinková komora je citlivější a zároveň přesnější než komora mlžná. V obou případech byly ovšem výsledné dráhy fotografovány a ručně vyhodnocovány, což značně limitovalo množství zpracovaných dat.

Jiskrová či **drátěná** komora jsou protkány vodiči pod napětím a plynem, kterým při ionizaci proteče proudový pulz (podobně jako v Geiger-Müllerově čítači). Pulzy jsou lokalizované a automaticky zpracovávány pomocí elektroniky. Je možné rekonstruovat dráhu částice i její energetické ztráty a detektor vypínat a zapínat podle potřeby.

V současné době nejpoužívanější jsou **křemíkové detektory** skládající se z mnoha pixelů, v nichž procházející částice vytváří páry elektron-díra a tedy elektrický proud. Tyto detektory mají mimořádně dobré prostorové i časové rozlišení.

Kalorimetry jsou specializované detektory měřící energii částice. Jsou složeny z hustého materiálu tak, aby v nich částice podstoupila mnoho interakcí, vytvořila spršku sekundárních částic a její vstupní energie se tak zcela pohltila.

Částice procházející detektorem ztrácí energii ionizací okolní hmoty. (U lehčích částic, elektronů a pozitronů, hraje roli i brzdné záření způsobené ohybem jejich trajektorie.) Ionizační ztráty energie v závislosti na hybnosti částice popisuje Bethe-Blochova formule.

Samostatnou kapitolou je detekce fotonů. Foton s relativně nízkou energií (do ~ 100 keV) způsobuje fotoefekt, tj. vyražení elektronu z materiálu. Ten je dále urychlen elektrickým polem a další nárazy způsobí lavinu elektronů a tedy elektrický proud. To je princip **fotonásobiče**. Vysoce-energetické fotony (nad ~ 10 MeV) interagují především tvorbou párů elektron-pozitron, které dále reagují. Ve středním rozsahu energií, 100 keV až 10 MeV, dominuje Comptonův rozptyl, při kterém foton narazí do elektronu a ten svým pohybem způsobí ionizaci materiálu.

Scintilátory jsou materiály, v nichž průchodem částice dojde k excitaci elektronů a při jejich deexcitaci látka vyzařuje světlo. To je dále registrováno pomocí fotonásobičů.

Na závěr ještě zmíníme **Čerenkovovo záření**. To vzniká, pokud je rychlost částice v větší, než je rychlost světla v daném prostředí: c/n , kde n je index lomu. (Jako analogii si představme motorový člun rychle plující po moři, který vytváří vlny šířící se pod určitým úhlem vzhledem ke směru pohybu.) Porovnáním vzdálenosti uražené částicí a světlem za čas t dostaneme jednoduchý vztah pro úhel θ mezi směrem pohybu částice a směrem šíření vlny: $\cos \theta = \frac{c/n}{v}$.

Příloha A

Otázky ke zkoušce

1. Relativistická kinematika, Rozpad a rozptyl částic
2. Klasická teorie pole, Lagrangeův formalismus, Symetrie a zachováající se veličiny
3. Lieovy grupy a algebry, Unitární grupy, Reprezentace Lieových algeber
4. Yang-Millsovy kalibrační teorie, Elektrodynamika, Neabelovské kalibrační teorie
5. Slabé interakce, Parita, Kalibrační teorie elektroslabých interakcí
6. Spontánní narušení symetrie, Goldstoneův model a Higgsův mechanismus
7. Hadrony a kvarkový model, Interakce kvarků
8. Matice rozptylu, Poruchový rozvoj, Renormalizace
9. Standardní model částicové fyziky: Elementární částice a jejich interakce
10. Urychlovače a detektory částic

Literatura

- [1] J. Hořejší, *Historie standardního modelu mikrosvěta*, 2. vydání (2017/2018).
- [2] J. Hořejší, *Fundamentals of Electroweak Theory*, 2nd Ed., World Scientific (2024).
<https://arxiv.org/abs/2210.04526>
- [3] M. Veltman, *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics*, World Scientific (2003).